OM
ELLIPSOIDERS TILTRÆKNING

OG OM

DE ELLIPSOIDISKE LIGEVÆGTSFIGURER AF FLYDENDE MASSER

VED

C. RAMUS.

Det franske Videnskabers Academie udsatte som Priisspörgsmaal for Aaret 1740 Theorien af Havets Ebbe og Flod. Præmien blev deelt mellem fire Forfattere, hvis Priisskrifter derefter bekjendtgjordes, Cavallieri, D. Bernoulli, Maclaurin og Euler, men *Maclaurins* Afhandling, De causa physica fluxus et refluxus maris*), er mærkelig derved, at man i samme förste Gang finder fremsat den rigtige Bestemmelse af Tiltrækningen, som en homogen Revolutions-Ellipsoide udöver paa et Punkt i dens Masse eller paa dens Overflade. Tillige beviste han, at en homogen flydende Masse ved at antage Figuren af en fladtrykt Revolutions-Ellipsoide kan være i Ligevægt, idet den med uforandret Hastighed roterer om den korte Axe og er underkastet alle Moleculernes gjensidige Tiltrækninger. Attractionsloven er forudsat at være den almindelige Tyngdes, ligefrem som Masserne og omvendt som Qvadraterne af Afstandene. Maclaurins Methode er ikke mindre mærkelig end de Resultater, hvortil han er kommen. Den er reent geometrisk, og Laplace sætter det nævnte Skrift tilligemed Huygens's De horologio oscillatorio ved Siden af det skjönneste og meest fuldkomne, som de gamle Geometrer have efterladt af den synthetiske Geometrie. *Lagrange* er den förste, som anvendte den

*) I Recueil des pièces qui ont remporté les prix à l'acad. des sc., og i Philosophiæ naturalis principia mathematica, aut. Neutono, udg. af le Seur et Jacquier T. III, pag. 247).

mathematiske Analyse paa Problemet af Sphæroiders Tiltrækning*), idet han fremsatte en fuldstændig analytisk Theorie af Revolutions-Ellipsoiders Tiltrækning, og kom saaledes paa en simpel Maade til Maclaurins Resultater. Han udvidede disse til hvilkesomhelst Ellipsoider, og godtgjorde, at den Tiltrækning, som Ellipsoiden udöver paa et Punkt beliggende i Forlængelsen af en af dens Axer, forholder sig til den Tiltrækning, som vilde udöves af en Ellipsoide beskreven om samme Centrum og Brændpunkter og hvis Overflade gik igjennem det tiltrukne Punkt, saaledes som den förste Ellipsoides Masse forholder sig til den andens Masse. Dette Theorem, fremsat af Maclaurin uden Beviis**), er ogsaa godtgjort af *d'Alembert****) og *Legendre*****). Denne sidste hævede Theorien af Ellipsoiders Tiltrækning op over de Grændser, hvortil den var bragt ved Maclaurin, idet han godtgjorde det anförte Theorem, vel for Tilfældet af Revolutions-Ellipsoider alene, men idet det udvendige Punkt, som tiltrækkes, er stillet hvorsomhelst. Det lykkedes ham ikke at godtgjöre den samme Sætning for Ellipsoiden med ulige Axer. Dette opnaaede *Laplace* i et eget Skrift om den elliptiske Bevægelse og om Planeternes Figur, udgivet 1784; hans Beviis indrykkedes senere i Mécanique céleste†). De Vanskeligheder, som den directe Integration medförer, har Laplace undgaaet ved en ingeniös Methode af Rækkeudvikling; denne Methode er exact, da det alene kommer an paa Rækkens Form, derimod ikke paa den Grad af Nöiagtighed som opnaaes. Legendre sögte dernæst at gaae Integrations-Vanskelighederne imöde directe††), men ligesom hans Ana-

*) Mémoires de l'académie de Berlin, 1773 og 1775.

**) A treatise of fluxions by *Colin Mac Laurin*, Edinburgh 1742, vol. II pag. 543 Nr. 653.

***) Mémoires de l'académie de Berlin, 1774; Opuscules, T. VII.

****) Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'acad. par divers savans, T. X, Paris 1785.

†) Traité de mécanique céleste, T. II, pag. 12—21.

††) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1788.

lyse er i höi Grad indviklet, kunde den heller ikke lede til Maalet uden i de Tilfælde, hvor det tiltrukne Punkt ligger i et af de Planer, som gjennemskjære Ellipsoiden efter Hovedsnittene. *Ivory* har angivet den simpleste Methode til at eludere Vanskelighederne, idet han anvendte en heldig Transformation af Coordinater*). Först i Aaret 1833 har *Poisson***) paa en aldeles directe Maade overvundet Vanskelighederne ved den lykkelige Tanke at dele Ellipsoiden i uendelig tynde concentriske og ligedanne Lag. Composanterne af Tiltrækningen, som et saadant Lag udöver paa et udvendigt Punkt, fremstiller sig under endelig Form, hvoraf udledes enkelte Integraler for Composanterne til den Tiltrækning, som udöves enten af den hele Ellipsoide eller ogsaa af en Ellipsoideskal indsluttet mellem to concentriske og ligedanne, eens stillede, Ellipsoideflader, hvad enten Massen er homogen eller Tætheden varierer ved Overgangen fra ethvert uendeligt tyndt Lag til det fölgende. Poisson beviste, at Tiltrækningen af det uendelig tynde Lag er dirigeret efter den indvendige Axe af den Kegle, som har sit Toppunkt i det tiltrukne Punkt, og er omskreven om samme Lags ydre Grændseflade. *Chasles****) har senere viist, hvorledes man i denne Undersögelse kunde stötte sig paa visse geometriske Egenskaber ved Flader af 2den Grad, og saaledes komme til flere af Poissons Resultater lettere end ved den analytiske Methode. Han föiede desuden flere vigtige Corollarier til, hvorved denne Theorie yderligere oplystes og fuldstændiggjordes. Den Rapport over Chasles's Arbeide, som Poinsot afgav til Academiet, foranledigede en Strid mellem denne og Poisson, hvis Navn ikke forekom i Rapporten****); men man kan ikke undlade at give Poisson Medhold i, at Ingen för ham har tænkt

*) Philosophical transactions, 1809.

**) Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France, T. XIII.

***) Journal de l'école royale polytechnique, 25me cah., Paris 1837. S. ogsaa en Afhandling af *Steiner* (Crelles Journal, 12te Bd. Pag. 141).

****) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, 1838, 1er sem. Nr. 24, 25, 26, 2me sem. Nr. 1, 2.

sig Ellipsoiden decomponeret i Lag dannede af concentriske ligedanne og eensstillede Ellipsoideflader, og at det alene herved lykkes at overvinde Vanskeligheden ved den directe Bestemmelse af Tiltrækningens Störrelse og Retning, hvad enten man vil betjene sig af den analytiske eller af den saakaldte geometriske Methode. Hverken Decompositionen i coniske Lag anvendt af Legendre (Hist. de l'acad. 1788) eller den i Lag indsluttede af homofocale Ellipsoideflader, anvendt af *Rodrigues**), havde kunnet lede til Maalet. — Theorien af Ellipsoiders Tiltrækning har endeligen faaet en mærkværdig Udvidelse i Aaret 1839 ved *Lejeune-Dirichlet***), som formedelst en ingeniös Benyttelse af visse bestemte Integraler har opnaaet at udtrykke Composanterne til Tiltrækningen ved enkelte Integraler, for den homogene Ellipsoide med tre ulige Axer, idet Attractionen ikke længer antages som forhen at være omvendt proportional med Afstandenes Qvadrater, men at forholde sig som en hvilkensomhelst, positiv eller negativ, Potents af Afstanden. Vi skulle i den fölgende Afhandling fremstille denne Methode og oplyse de Vanskeligheder, som dermed ere forbundne. Det maa nemlig bemærkes, at Opfinderen ikke har taget de Indskrænkninger i Betragtning, hvortil de bestemte Integraler ere bundne. Dette gjör en dybere Undersögelse nödvendig, som er et af Formaalene for nærværende Arbeide.

Maclaurin godtgjorde Theoremet om Revolutions-Ellipsoiden som Ligevægtsfigur for et homogent Fluidum, som med uforandret Hastighed dreier sig om en bestemt Axe, idet alle Moleculerne gjensidigen tiltrække hinanden omvendt som Qvadratet af Afstanden. Dette Theorem maatte naturligen lede til forskjellige Spörgsmaale om Ligevægtsfigurernes Bestemmelse, men det er kun meget faa af disse, som Videnskaben hidtil har formaaet at besvare. Alle de Ligevægtsfigurer, som overhoved kunne

*) Correspondance sur l'école royale polytechnique, T. III, Paris 1816, pag. 366.

**) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, 1839, 1er sem. Nr. 5.

existere for en given Rotation, maae söges ved Hjælp af Betingelsesligningen for Ligevægten, som haves ifölge de almindelige Principer i Hydrostatiken saaledes som disse ere blevne fremstillede af Clairaut, d'Alembert, Euler. Denne Betingelsesligning udtrykker, at Resultanten af alle de Kræfter, som virke paa et hvilketsomhelst Punkt af den frie Overflade, er dirigeret efter Normalen, og den erholdes ved at multiplicere Composanterne efter de tre retvinklede Axer med Differentialerne af de tilsvarende Coordinater, og sætte Summen liig Nul. De Kræfter, som herved maae tages i Beregning, ere af to Slags: deels Tiltrækningerne til alle Punkter i Massen, deels Centrifugalkraften, som skyldes Rotationsbevægelsen. Resultanten af alle Tiltrækningerne giver tre Composanter efter Axerne, som udtrykkes ved tredobbelte Integraler, hvis yderste Grændser ere bestemte ved selve den frie Overflade, som söges; thi disse Integraler udtrykke Summer af Elementer, som maae udstrækkes til alle Punkter af Massen. Den anden nævnte Kraft er bestemt ved det bekjendte Princip i Mechaniken, som först er beviist af *Huygens* og som udsiges saaledes*): „Centrifugalkraften af et Punkt, som omdreies i en Cirkel, er dirigeret „efter Forlængelsen af Radius og er liig Hastighedens Qvadrat divideret „med Radius". Vælges altsaa Rotationsaxen som en af de coordinerte Axer, vil Composanten til Centrifugalkraften efter denne Axe forsvinde, men Composanten efter enhver af de to andre Axer bliver liigt et Produkt, hvis ene Factor er den angulære Hastighed qvadreret, den anden er Coordinaten efter samme Axe. Da Composanterne til den förste Slags af Kræfter ere bestemte ved selve Ligningen for Overfladen, bliver

---

*) *Christiani Hugenii* Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ, Parisiis 1673. Pag. 159—161 findes Huygens's 13 Theoremer om Centrifugalkraften (de vi centrifuga ex motu circulari Theoremata). Hans theorema Vtum lyder saaledes: „Si mobile in circumferentia „circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quartæ „parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem; hoc est, „eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est".

der en gjensidig Afhængighed mellem de tredobbelte Integraler, som indgaae i Coefficienterne i Differentialligningen, og den tilsvarende primitive Ligning. Problemet kan derfor kun oplöses, som det kaldes, forsögsviis (par tâtonnement), idet en vis fri Overflade antages som Hypothese, hvorefter man undersöger, om den tilsvarende Bestemmelse for de tredobbelte Integraler som Functioner af Coordinaterne til det vilkaarlige Punkt i Overfladen lader Differentialligningen falde sammen med den, som tilhörer samme Overflade. Antages f. Ex. Attractionen at fölge den sædvanlige Lov, omvendt som Qvadratet af Afstanden, og bestemmes de tredobbelte Integraler ifölge Theorien af Revolutions-Ellipsoidens Tiltrækning, idet nemlig Overfladen forudsættes at være en Revolutions-Ellipsoide om den mindste Axe, som tillige er Rotationsaxe, saa antager Differentialligningen netop Formen af denne Flades Differentialligning, hvorved *Maclaurins* Theorem udkommer. Antages for den samme Attractionslov Overfladen at være en Ellipsoide med tre ulige Axer, og bestemmes de tredobbelte Integraler med Hensyn til dette Tilfælde, altsaa ifölge Theorien af den almindelige Ellipsoides Tiltrækning, saa vil atter Differentialligningen blive af samme Form som denne Flades Differentialligning, og saaledes udkommer da Theoremet om Ellipsoiden med tre ulige Axer som Ligevægtsfigur. Det er mærkeligt, at dette Theorem har undgaaet Mathematikerne lige indtil *Jacobi* gjorde opmærksom derpaa i Aaret 1834*), og især deleshed at det undgik Lagrange, da han kom til den Ligning i hans Mécanique analytique**), hvoraf begge de nævnte Tilfælde af Ligevægtsfigurer kunne afledes. Disse Figurer ere de eneste, hvis Mulighed er godtgjort for det homogene Fluidum roterende om en Axe og underkastet alle Delenes gjensidige Tiltrækninger efter den an-

---

*) L'institut, journal général des sociétés et travaux scientifiques, T. II, Nr. 86 (25 oct. 1834); Journal de l'école polytechnique 23me cah., pag. 289 (Liouville).

**) Mécanique analytique, nouv éd., T. II, pag. 204.

förte Lov; men ligesom det först var *Laplace**), som tilfredsstillende afgjorde det Spörgsmaal, hvorvidt forskjellige Revolutions-Ellipsoider kunne svare enten til den samme Rotationshastighed eller den samme primitive Impuls, saaledes have nyligen *C. O. Meyer***) og *Liouville****) suppleret Jacobis Sætning ved at discutere Ligningerne, som udtrykke Afhængigheden af den almindelige Ellipsoide enten af Rotationshastigheden eller af Impulsen, efterat *Ivorys*****) Forsög i denne Retning havde viist sig utilfredsstillende. Vi have i den fölgende Afhandling meddeelt den fuldstændige Undersögelse herom, og man vil finde tilföiet en numerisk Tavle tjenende til at lette Oversigten over Revolutions-Ellipsoiderne i Relation til Rotationshastighederne eller rettere i Relation til Værdierne af det Forhold, som der er mellem den angulære Hastighed qvadreret og Produktet af 2π multipliceret med Attractions-Coefficienten Gang Tætheden. Det maa endnu bemærkes, at der gives en Attractionslov, for hvilken baade Massers Tiltrækning i Almindelighed, og tillige Revolutions-Ellipsoiden som det homogene roterende Fluidums Ligevægtsfigur, med störste Lethed bestemmes. Det er nemlig Attractionen ligefrem proportional med Afstandene, og Massen behöver da ikke engang at være homogen, men kan bestaae af concentriske ligedanne Niveaulag, som hvert for sig er homogent, medens de have Tætheder, som ere forskjellige indbyrdes. Man kan heraf uddrage den Slutning, at ellipsoidiske Ligevægtsfigurer ere mulige for det homogene roterende Fluidum, hvis Dele alle tiltrække hinanden efter den Attractionslov, Function af Afstanden u, som kan fremstilles ved

$$\frac{g}{u^2} + G\,u,$$

*) Traité de Mécanique céleste, T. II, pag. 55—58, 60—62.

**) Crelles Journal 24de Bd., Pag. 50.

***) Connaissance des temps pour l'an 1846, Additions pag. 85.

****) Philosophical transactions, 1838; s. Observations sur un mémoire de M. *Ivory* par *J. Liouville* i Journal de mathém., 1839, pag. 169.

hvor g og G ere Constanter. Derimod vil det blive beviist, at *for enhver anden Attractionslov ere ellipsoidiske Ligevægtsfigurer umulige.* Specielt fölger heraf, at *af alle de Tiltrækninger, som aftage hver Gang Afstanden voxer, er den sædvanlige Tiltrækning, omvendt som Quadratet af Afstanden, den eneste, som kan gjöre ellipsoidiske Ligevægtsfigurer mulige.*

Ligesom dette Theorem forögerBetydningen af alle de Arbeider, som ere præsterede over de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer, saaledes maa det ogsaa forstærke Önsket om, at Mathematikerne ville henvende deres Bestræbelser paa Hovedopgaven, at undersöge fuldstændigen alle de Ligevægtsfigurer, som ere mulige for det homogene roterende Fluidum idetmindste for Tilfældet af den sædvanlige Tiltrækning. For denne Tiltrækning og for Figurer, som komme meget nær til Kuglen, idet Centrifugalkraften paa ethvert Sted af Overfladen antages meget lille i Sammenligning med Tyngden (den resulterende Tiltrækning til Massen), har *Laplace**) ved en særegen Methode af Rækkeudvikling godtgjort, at Revolutions-Ellipsoiden er den eneste mulige Ligevægtsfigur. Den reduceres til Kuglen selv, naar Centrifugalkraften antages forsvindende. Det indsees ogsaa let, at Kuglen er en Ligevægtsfigur for det ubevægelige Fluidum, og det for en hvilkensomhelst Attractionslov. Men er den den eneste? Det tör man ikke paastaae, thi Laplaces Revolutions-Ellipsoide forudsatte, at Figuren allerede afveg meget lidt fra Kuglen. De ikke sphæriske Ligevægtsfigurer af et hvilende Fluidum, underkastet den almindelige Tyngde, maatte altsaa, hvis de kunde existere, ikke falde i Nærheden af Kugleformen. Deres Ikke-Existents er i nogle elementære Skrifter urigtigen antagen som et Axioma.

Den efterfölgende Undersögelse er deelt i tre Paragrapher:

§ I. Undersögelse af de bestemte Integraler, hvorved Ellipsoiders Tiltrækning beregnes.

---

*) Traité de Mécanique céleste, T. II, pag. 72.

§ II. Ellipsoiders Tiltrækning.

§ III. Undersögelse af de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af en flydende Masse, som er i Rotation.

---

§ I. Undersögelse af de bestemte Integraler, hvorved Ellipsoiders Tiltrækning beregnes.

1. Man sætte

$$y = \int_{x_0}^{x_1} e^{-bx} \cos ax . x^{n-1} dx, \quad z = \int_{x_0}^{x_1} e^{-bx} \sin ax . x^{n-1} dx. \qquad (1)$$

Ved Differentiation med Hensyn til a haves

$$\frac{dy}{da} = -\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx} \sin ax . x^n dx, \quad \frac{dz}{da} = \int_{x_0}^{x_1} e^{-bx} \cos ax . x^n dx,$$

og ved deelviis Integration erholdes

$$\int e^{-bx} \sin ax . x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \sin ax . x^n + \frac{a}{b} \int e^{-bx} \cos ax . x^n dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \sin ax . x^{n-1} dx,$$

$$\int e^{-bx} \cos ax . x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \cos ax . x^n - \frac{a}{b} \int e^{-bx} \sin ax . x^n dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \cos ax . x^{n-1} dx.$$

Altsaa er

$$-\frac{dy}{da} = -\frac{1}{b} \left\{ e^{-bx} \sin ax . x^n \right\}_{x_0}^{x_1} + \frac{a}{b} \frac{dz}{da} + \frac{n}{b} z,$$

$$\frac{dz}{da} = -\frac{1}{b} \left\{ e^{-bx} \cos ax . x^n \right\}_{x_0}^{x_1} + \frac{a}{b} \frac{dy}{da} + \frac{n}{b} y,$$

hvor $\{\ \}_{x_0}^{x_1}$ betegner Differentsen af den indsluttede Störrelses Værdier svarende til $x = x_1$ og $x = x_0$, den sidste trukket fra den förste. Heraf udledes Differentialligningerne af 2den Orden, som tjene til særskilt at bestemme y og z:

$$(a^2+b^2)\frac{d^2y}{da^2}+2(n+1)\,a\frac{dy}{da}+n(n+1)y=\Big\{e^{-bx}x^n\big[(bx+n+1)\cos ax-ax\sin ax\big]\Big\}_{x_0}^{x_1},$$

$$(a^2+b^2)\frac{d^2z}{da^2}+2(n+1)\,a\frac{dz}{da}+n(n+1)z=\Big\{e^{-bx}x^n\big[(bx+n+1)\sin ax+ax\cos ax\big]\Big\}_{x_0}^{x_1}.$$

Man sætte

$$a=b\operatorname{tg}t,\quad y=\left(\frac{\cos t}{b}\right)^n u,\quad z=\left(\frac{\cos t}{b}\right)^n v, \tag{2}$$

hvorefter findes

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}+n^2u&=\left\{\left[\frac{bx}{\cos t}\cos(t+bx\operatorname{tg}t)+(n+1)\cos(bx\operatorname{tg}t)\right]\frac{e^{-bx}(bx)^n}{\cos^{n+2}t}\right\}_{x_0}^{x_1}=U(t),\\ \frac{d^2v}{dt^2}+n^2v&=\left\{\left[\frac{bx}{\cos t}\sin(t+bx\operatorname{tg}t)+(n+1)\sin(bx\operatorname{tg}t)\right]\frac{e^{-bx}(bx)^n}{\cos^{n+2}t}\right\}_{x_0}^{x_1}=V(t).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Heraf fölger ved Integration

$$\left.\begin{aligned}u&=A\cos nt+B\sin nt+\frac{1}{n}\left[\sin nt.\int_0^t U(t)\cos nt.dt-\cos nt.\int_0^t U(t)\sin nt.dt\right],\\ v&=C\cos nt+D\sin nt+\frac{1}{n}\left[\sin nt.\int_0^t V(t)\cos nt.dt-\cos nt.\int_0^t V(t)\sin nt.dt\right],\end{aligned}\right\}$$

eller simplere

$$\left.\begin{aligned}u&=A\cos nt+B\sin nt+\frac{1}{n}\int_0^t U(\theta)\sin n(t-\theta)\,d\theta,\\ v&=C\cos nt+D\sin nt+\frac{1}{n}\int_0^t V(\theta)\sin n(t-\theta)\,d\theta,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

hvoraf y og z udledes ifölge (2). For $a=0$ haves $t=0$ og $\frac{dt}{da}=\frac{1}{b}$, altsaa

$$u=A,\ \frac{du}{da}=\frac{nB}{b},\quad v=C,\ \frac{dv}{da}=\frac{nD}{b},$$

hvoraf igjen fölger

$$y=Ab^{-n},\ \frac{dy}{da}=nBb^{-n-1},\quad z=Cb^{-n},\ \frac{dz}{da}=nDb^{-n-1},$$

men ifölge (1) haves for $a=0$

$$y=\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\,x^{n-1}\,dx,\ \frac{dy}{da}=0,\ z=0,\ \frac{dz}{da}=\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\,x^n\,dx.$$

Altsaa er

$$A=b^n\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}x^{n-1}dx,\ B=0,\ C=0,\ D=\frac{1}{n}b^{n+1}\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\,x^n\,dx,$$

saa at man har

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\cos ax.x^{n-1}dx=\cos^n t.\cos nt.\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}x^{n-1}dx\\
&+\frac{\cos^n t}{n}.\left\{e^{-bx}x^n\int_0^t \frac{\frac{bx\cos(\theta+bx\operatorname{tg}\theta)}{\cos\theta}+(n+1)\cos(bx\operatorname{tg}\theta)}{\cos^{n+2}\theta}\sin n(t-\theta)d\theta\right\}_{x_0}^{x_1},\\
&\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\sin ax.x^{n-1}dx=\frac{b}{n}\cos^n t.\sin nt.\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}x^n dx\\
&+\frac{\cos^n t}{n}.\left\{e^{-bx}x^n\int_0^t \frac{\frac{bx\sin(\theta+bx\operatorname{tg}\theta)}{\cos\theta}+(n+1)\sin(bx\operatorname{tg}\theta)}{\cos^{n+2}\theta}\sin n(t-\theta)d\theta\right\}_{x_0}^{x_1}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Naar $x_0=0$, $x_1=\infty$, og tillige b og n antages positive, erholdes

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax.x^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\cos nt,\\
&\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax.x^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sin nt,
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

thi som bekjendt haves

$$\int_0^\infty e^{-bx}x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{b^n},\quad \Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n).$$

Antages i Formlerne (6) $b=0$, hvilket er tilladt, omendskjöndt b er antagen positiv, thi den kan stedse bringes ligesaa nær ved 0 som man vil, haves $t=\pm\frac{\pi}{2}$, överste eller nederste Fortegn gjældende, eftersom a er positiv eller negativ, fölgelig

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos ax.\, x^{n-1}\, dx &= \frac{\Gamma(n)}{(\pm a)^n} \cos\frac{n\pi}{2},\\ \int_0^\infty \sin ax.\, x^{n-1}\, dx &= \pm\frac{\Gamma(n)}{(\pm a)^n} \sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ved i den anden af disse at indsætte $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$ og ved dernæst at lade n convergere til 0, erholdes, idet $\Gamma(1) = 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

överste eller nederste Fortegn gjældende eftersom a er positiv eller negativ, hvorimod $a = 0$ giver $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = 0$. Altsaa ved at sætte

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos h\varphi.\, d\varphi = f(h) \tag{9}$$

og bemærke, at $\sin\varphi \cos h\varphi = \frac{1}{2}\sin(1+h)\varphi + \frac{1}{2}\sin(1-h)\varphi$, erholdes $f(h) = 1$ for alle Værdier af h fra $h = -1$ til $h = +1$, men udenfor dette Interval $f(h) = 0$, for selve Grændserne $f(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

2. Den foregaaende Methode, som har ledet til Formlerne (6) og derved til de af samme afledte (7), (8), (9), er fremstillet af *Poisson**), kun med den Forskjel, at vi först have dannet de mere almindelige Formler (5), hvorimod *Poisson* lige strax i Udtrykkene (1) antog $x_0 = 0$, $x_1 = \infty$, samt b og n positive, hvorved de Led, som ved deelviis Integration indkomme som befriede for Integraltegn, bringes umiddelbart til at forsvinde, saa at i (3) $U(t) = 0$, $V(t) = 0$. Formlerne (5) vise, at naar b og n ikke ere positive, ville ikke blot begge Integralerne (6), men ogsaa Differentserne

*) Journal de l'école polytechnique, 16me cah., pag. 215.

$$\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax.\,x^{n-1}\,dx - \frac{b^n\int_0^\infty e^{-bx}x^{n-1}dx}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\cos nt,$$

$$\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax.\,x^{n-1}\,dx - \frac{b^{n+1}\int_0^\infty e^{-bx}x^n dx}{n(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sin nt,$$

blive uendelige. Naar altsaa Formlerne (6), idet den anden multipliceret med $\sqrt{-1}$ adderes til den förste, give

$$\int_0^\infty e^{-bx+ax\sqrt{-1}}x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}e^{nt\sqrt{-1}}, \tag{10}$$

saa maa herved forudsættes, at b og n ere positive. Dog sees det tillige ved Betragtning af Formlerne (5), at b og n kunne være imaginære af Formen $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, idet α og β ere reelle, den förste positiv. Ved i (10) at lade b convergere til 0 erholdes

$$\int_0^\infty e^{ax\sqrt{-1}}x^{n-1}dx = \frac{\Gamma(n)}{(\pm a)^n}e^{\pm\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}, \tag{11}$$

hvor n forudsættes positiv, eller imaginær under den angivne Form, og hvor överste eller nederste Fortegn gjælder, eftersom a er positiv eller negativ.

3. *Cauchy* har behandlet Integralerne (1) ved Methoden af Dobbelt-Integration saaledes*). P og M være Functioner af x, n positiv, altsaa

$$\frac{1}{M^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-Mz}z^{n-1}\,dz,$$

hvoraf, idet Integrations-Ordenen med Hensyn til z og x vendes om,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{P\,dx}{M^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\,dz\int_{x_0}^{x_1}e^{-Mz}P\,dx.$$

Sættes $M = x$ og successive $P = e^{-bx}\cos ax$, $P = e^{-bx}\sin ax$, erholdes ved i höire Side at udföre Integrationen med Hensyn til x:

*) Journal de l'école polytechnique, 28me cah., pag. 158.

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\cos ax.\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}dz}{(b+z)^2+a^2}\left\{e^{-(b+z)x}[-(b+z)\cos ax+a\sin ax)\right\}_{x_0}^{x_1},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-bx}\sin ax.\frac{dx}{x^n}=\frac{-1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}dz}{(b+z)^2+a^2}\left\{e^{-(b+z)x}[(b+z)\sin ax+a\cos ax]\right\}_{x_0}^{x_1}.$$

Antages dernæst $x_0=0$, $x_1=\infty$, b positiv, erholdes

$$\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax.\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{(b+z)z^{n-1}dz}{(b+z)^2+a^2}=\frac{1}{\Gamma(n)}.\frac{\pi}{\sin n\pi}.\frac{\cos(1-n)t}{(a^2+b^2)^{\frac{1-n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax.\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{az^{n-1}dz}{(b+z)^2+a^2}=\frac{1}{\Gamma(n)}.\frac{\pi}{\sin n\pi}.\frac{\sin(1-n)t}{(a^2+b^2)^{\frac{1-n}{2}}},$$

idet $a=b\operatorname{tg} t$, men herved forudsættes tillige $n<1$. Forandres endeligen n til $1-n$, og bemærkes at

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}, \tag{12}$$

erholdes Formlerne (6), forsaavidt $0<n<1$; men denne Indskrænkning bortfalder igjen derved, at man i (6) kan forandre n successive til $n+1$, $n+2$, $n+3,\ldots$, thi det samme udkommer ved successive Differentiationer med Hensyn til a.

4. Formlerne (6) kunne ikke udvides til Tilfældene af negative Værdier af n, uden derved at man betjener sig af de saakaldte *extraordinære Integraler*. Disses Begreb har *Cauchy* fastsat saaledes *). Er P en Function af x, som ikke forsvinder tilligemed x, og a et hvilketsomhelst positivt Tal, saa vil Integralet

$$\int_0^{x_1}\frac{P\,dx}{x^{a+1}}$$

nödvendigen være uendeligt; men naar λ er det störste hele Tal indeholdt i a og

$$X=c+c_1x+c_2x^2\ldots.+c_\lambda x^\lambda$$

*) Exercices de mathém., T. 1, pag. 58; Journ. de l'éc. polyt., 28me cah., pag. 224.

de $\lambda+1$ förste Led i Udviklingen af P efter stigende Potentser af x, vil

$$\int_0^{x_1}\frac{P-X}{x^{a+1}}\,dx$$

almindeligen have en endelig Værdie, ligesom det ogsaa indsees, at denne Bestemmelse for X er den eneste, hvorved dette Integral kan blive endeligt, forsaavidt som man for X vil tage en heel rational Function af x. Da saaledes X er bestemt ved den givne Function $\frac{P}{x^{a+1}}$, vil ogsaa det extraordinære Integral være herved bestemt, og kan fremstilles ved fölgende Betegnelse:

$$\int_0^{\prime x_1}\frac{P\,dx}{x^{a+1}}=\int_0^{x_1}\frac{P-X}{x^{a+1}}\,dx. \qquad (13)$$

Man kunde ogsaa udvikle $\int_\alpha^{x_1}\frac{P\,dx}{x^{a+1}}$, idet α er en meget lille Störrelse, efter stigende Potentser af α og i denne Udvikling sætte $\alpha=0$, efterat man har udelukket alle de Led, som indeholde negative Potentser af α. Disse extraordinære Integrationer ere bundne til de samme Regler som de ordinære, og man vil ofte kunne komme til at transformere den ene Slags til den anden.

5. Det Eulerske Integral af 2den Art bestemt ved

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx \qquad (14)$$

forudsætter a positiv; men ved Hjælp af den extraordinære Integration vil man have*)

$$\Gamma(-a)=\int_0^{\prime\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x^{a+1}}. \qquad (15)$$

*) Exercices de mathém., T. I pag. 60, T. II pag. 92; Journ. de l'éc. polyt., 28me cah., pag. 226. Hermed sammenholde man *Legendre*, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes, T. II, pag. 476.

Af (14) og (15) fölger ved at sætte $x = by$, idet b er positiv, og igjen skrive x for y:

$$\Gamma(a)\, b^{-a} = \int_0^{\infty} e^{-bx}\, x^{a-1}\, dx, \quad \Gamma(-a)\, b^{a} = \int_0^{l\infty} \frac{e^{-bx}\, dx}{x^{a+1}}. \tag{16}$$

λ og $\lambda + 1$ være de to hele Tal, hvorimellem a ligger. Ved nu at multiplicere den förste (16) med $db^{\lambda+1}$ og integrere $\lambda + 1$ Gange successive med Hensyn til b fra 0 til b, erholdes:

$$\frac{\Gamma(a)\, b^{-a+\lambda+1}}{(-a+1)(-a+2)\dots(-a+\lambda+1)} = (-1)^{\lambda+1} \int_0^{l\infty} \frac{e^{-bx} dx}{x^{\lambda-a+2}} = (-1)^{\lambda+1}\Gamma(a-\lambda-1)\, b^{-a+\lambda+1},$$

idet de uendelige Led, som skulde indkomme formedelst den lavere Grændse $b=0$, maae antages at gaae op imod hinanden paa begge Sider, saa at alene de Led blive tilbage i Resultatet, som have endelig Form. Bemærkes dernæst, ifölge hvad forhen er bekjendt, at

$$(-a+1)(-a+2)\dots(-a+\lambda) = (-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-\lambda)}, \tag{17}$$

erholdes

$$\Gamma(a-\lambda) = (a-\lambda-1)\,\Gamma(a-\lambda-1), \tag{18}$$

hvor $a - \lambda$ er positiv, men $a - \lambda - 1$ negativ. Ved istedetfor $db^{\lambda+1}$ ovenfor at tage $db^{\lambda+\mu+1}$ og derefter integrere $\lambda + \mu + 1$ Gange, idet μ er positiv heel, erholdes

$$\frac{\Gamma(a)\, b^{-a+\lambda+\mu+1}}{(-a+1)(-a+2)\dots(-a+\lambda+\mu+1)} = (-1)^{\lambda+\mu+1} \int_0^{l\infty} \frac{e^{-bx} dx}{x^{\lambda+\mu-a+2}} = (-1)^{\lambda+\mu+1}\Gamma(a-\lambda-\mu-1)\, b^{-a+\lambda+\mu+1},$$

saa at man har ifölge (17)

$$\frac{\Gamma(a-\lambda)}{(a-\lambda-1)(a-\lambda-2)\dots(a-\lambda-\mu-1)} = \Gamma(a-\lambda-\mu-1)$$

eller simplere ved at sætte $a - \lambda = n$

$$(0<n<1) \qquad \frac{\Gamma(n)}{(n-1)(n-2)\dots(n-\mu-1)} = \Gamma(n-\mu-1).$$

Ved for μ at sætte $\mu - 1$ erholdes

$$(0<n<1) \qquad \frac{\Gamma(n)}{(n-1)(n-2)\dots(n-\mu)} = \Gamma(n-\mu). \tag{19}$$

Af de to sidste Formler fölger

$$\Gamma(n-\mu) = (n-\mu-1)\,\Gamma(n-\mu-1), \tag{20}$$

hvor $n-\mu$ er negativ. Den forhen bekjendte Formel

$$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1), \tag{21}$$

hvor a og $a-1$ ere forudsatte positive, er ved (18) udvidet til Tilfældet af a positiv, $a-1$ negativ, og ved (20) udvidet til Tilfældene af hvilkesomhelst negative Værdier af a. Formlen (19) kan overhoved tjene til at udvide alle de Formler for Γ, i hvilke der forudsættes positive Værdier af de forskjellige Störrelser, som ere umiddelbart indbefattede under dette Functionstegn. F. Ex. naar i Formlen (12), som forudsætter n og $1-n$ positive, indsættes

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu)\Gamma(n-\mu),\quad \Gamma(1-n)=\frac{\Gamma(\mu+1-n)}{(1-n)(2-n)\ldots(\mu-n)},$$

erholdes

$$\Gamma(n-\mu)\,\Gamma(\mu+1-n) = (-1)^{\mu}\frac{\pi}{\sin n\pi} = \frac{\pi}{\sin(n-\mu)\pi},$$

hvoraf, ved at sætte $n-\mu=a$,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \tag{22}$$

hvor a er negativ hvilkensomhelst. Da Formlen bliver uforandret ved Ombytning af a og $1-a$, kan ogsaa a være en hvilkensomhelst positiv Störrelse mellem 1 og $+\infty$, ligesom den ifölge (12) kan være positiv mellem 0 og 1. Altsaa kan overhoved i Formelen (22) a være en hvilkensomhelst reel Störrelse.

6. De extraordinære Integraler, som træde istedetfor Integralerne (6), naar n er negativ, bestemmes saaledes. Man sætte

$$Y=\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}\cos ax}{x^{n+1}}\,dx,\quad Z=\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}\sin ax}{x^{n+1}}\,dx, \tag{23}$$

hvor b og n forudsættes positive. Idet n ligger mellem de hele Tal λ og $\lambda+1$, haves

$$\frac{d^{\lambda+1}Y}{db^{\lambda+1}}=(-1)^{\lambda+1}\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax.x^{\lambda-n}dx,\ \frac{d^{\lambda+1}Z}{db^{\lambda+1}}=(-1)^{\lambda+1}\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax.x^{\lambda-n}dx,$$

eller ifölge (6)

$$\frac{d^{\lambda+1}Y}{db^{\lambda+1}}=\frac{(-1)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda-n+1)}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}}\cos(\lambda-n+1)t,\ \frac{d^{\lambda+1}Z}{db^{\lambda+1}}=\frac{(-1)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda-n+1)}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}}\sin(\lambda-n+1)t,$$

hvor $\operatorname{tg} t=\frac{a}{b}$, altsaa $e^{2t\sqrt{-1}}=\frac{b+a\sqrt{-1}}{b-a\sqrt{-1}}$, hvoraf fölger

$$\frac{\cos(\lambda-n+1)t}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}}=\frac{e^{(\lambda-n+1)t\sqrt{-1}}+e^{-(\lambda-n+1)t\sqrt{-1}}}{2\,(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}}=\frac{(b-a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}+(b+a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}}{2},$$

$$\frac{\sin(\lambda-n+1)t}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}}=\frac{e^{(\lambda-n+1)t\sqrt{-1}}-e^{-(\lambda-n+1)t\sqrt{-1}}}{2\,(a^2+b^2)^{\frac{\lambda-n+1}{2}}\sqrt{-1}}=\frac{(b-a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}-(b+a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}}{2\sqrt{-1}}.$$

Altsaa haves

$$\frac{d^{\lambda+1}Y}{db^{\lambda+1}}=(-1)^{\lambda+1}\frac{(b-a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}+(b+a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}}{2}\Gamma(\lambda-n+1),$$

$$\frac{d^{\lambda+1}Z}{db^{\lambda+1}}=(-1)^{\lambda+1}\frac{(b-a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}-(b+a\sqrt{-1})^{-(\lambda-n+1)}}{2\sqrt{-1}}\Gamma(\lambda-n+1).$$

Multipliceres disse Ligninger med $db^{\lambda+1}$ og integreres dernæst med Hensyn til b successive $\lambda+1$ Gange (ligesom ovenfor den förste Formel (16)), bemærkes tillige ifölge (19), at

$$(-1)^{\lambda+1}\frac{\Gamma(\lambda-n+1)}{(n-\lambda)(n-\lambda+1)\ldots n}=\frac{\Gamma(\lambda-n+1)}{(\lambda-n)(\lambda-n-1)\ldots(-n)}=\Gamma(-n),$$

saa erholdes*)

$$\left.\begin{aligned}Y&=\frac{(b-a\sqrt{-1})^n+(b+a\sqrt{-1})^n}{2}\Gamma(-n)=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos nt.\,\Gamma(-n),\\ Z&=\frac{(b-a\sqrt{-1})^n-(b+a\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}\Gamma(-n)=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(-nt).\,\Gamma(-n).\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

*) Journ. de l'éc. polyt., 28me cah., pag. 228.

Formlerne (23) og (24) sammenlignede med (6) vise, at disse sidste kunne udvides til negative Værdier af n, forsaavidt baade $\Gamma(n)$, som findes i höire Side, og Integralerne, som danne venstre Side, forandres til de tilsvarende extraordinære Integraler.

§ II. Ellipsoiders Tiltrækning.

7. Vi betragte först Kuglen, der kan ansees som en Ellipsoide med ligestore Axer. Den antages homogen, og man sætte dens Tæthed $=\varrho$, dens Radius $=r$, Centrets Afstand fra det tiltrukne Punkt $=a$, den resulterende Tiltrækning, som Kuglen udöver paa dette Punkt, hvilken Kraft stedse er dirigeret hen imod Centrum, $=A$. Idet $f(u)$ betegner Loven for Tiltrækningen mellem to Masse-Elementer tagne som Enhed og stillede i en indbyrdes Afstand $=u$, og idet man sætter

$$\int f(u)\,du=\varphi(u),\quad \int u\varphi(u)\,du=\psi(u), \tag{25}$$

haves som bekjendt*):

1⁰. naar det tiltrukne Punkt er indvendigt eller $a<r$,

$$A=2\pi\varrho\left\{\int_0^a udu\frac{d\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a}}{da}+\int_a^r udu\frac{d\frac{\psi(a+u)-\psi(u-a)}{a}}{da}\right\};$$

2⁰. naar det tiltrukne Punkt er udvendigt eller $a>r$,

$$A=2\pi\varrho\int_0^r udu\frac{d\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a}}{da}.$$

Man har

$$\frac{d\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a}}{da}=\frac{\psi'(a+u)-\psi'(a-u)}{a}-\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a^2},$$

altsaa

*) Traité de mécanique céleste, T. I, pag. 141.

$$u\,\frac{d\,\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a}}{da}=\left\{\begin{array}{l}\frac{(a+u)\psi'(a+u)+(a-u)\psi'(a-u)}{a}-[\psi'(a+u)+\psi'(a-u)]\\ -\frac{(a+u)\psi(a+u)+(a-u)\psi(a-u)}{a^2}+\frac{\psi(a+u)+\psi(a-u)}{a}\end{array}\right.$$

eller, ved at sætte

$$\int u\psi(u)\,du=\psi_1(u), \tag{26}$$

$$udu\,\frac{d\,\frac{\psi(a+u)-\psi(a-u)}{a}}{da}=d.\left\{\begin{array}{l}\frac{(a+u)\psi(a+u)-(a-u)\psi(a-u)}{a}-[\psi(a+u)-\psi(a-u)]\\ -\frac{\psi_1(a+u)-\psi_1(a-u)}{a^2}\end{array}\right.$$

$$=d.\left\{\frac{u}{a}[\psi(a+u)+\psi(a-u)]-\frac{1}{a^2}[\psi_1(a+u)-\psi_1(a-u)]\right\}.$$

Ligesaa findes

$$udu\,\frac{d\,\frac{\psi(a+u)-\psi(u-a)}{a}}{da}=d.\left\{\frac{u}{a}[\psi(a+u)+\psi(u-a)]-\frac{1}{a^2}[\psi_1(a+u)-\psi_1(u-a)]\right\}.$$

Altsaa, naar Værdierne af A med Hensyn til et indvendigt og udvendigt Punkt betegnes respective $A_1(a,r)$ og $A_2(a,r)$, haves

$$\left.\begin{array}{l}A_1(a,r)=2\pi\varrho\left\{\frac{r}{a}[\psi(r+a)+\psi(r-a)]-\frac{1}{a^2}[\psi_1(r+a)-\psi_1(r-a)]\right\},\\ A_2(a,r)=2\pi\varrho\left\{\frac{r}{a}[\psi(a+r)+\psi(a-r)]-\frac{1}{a^2}[\psi_1(a+r)-\psi_1(a-r)]\right\}.\end{array}\right\} \tag{27}$$

Af disse Formler sees, at $\frac{A_2(a,r)}{A_1(r,a)}=\frac{r^2}{a^2}$ *). Ligger Punktet paa Kuglens Overflade, vil Tiltrækningen være

$$A_1(r,r)=A_2(r,r)=2\pi\varrho\left\{\psi(2r)+\psi(0)-\frac{\psi_1(2r)-\psi_1(0)}{r^2}\right\}. \tag{28}$$

Naar specielt

$$f(u)=\frac{g}{u^p}, \tag{29}$$

*) Jvf. Traité de mécanique céleste, T. V, pag. 102.

haves

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u) &= -\frac{g}{p-1}\cdot\frac{1}{u^{p-1}},\\ \psi(u) &= \frac{g}{(p-1)(p-3)}\cdot\frac{1}{u^{p-3}},\\ \psi_1(u) &= -\frac{g}{(p-1)(p-3)(p-5)}\cdot\frac{1}{u^{p-5}},\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

altsaa ifölge (27), idet Kuglens Masse $= M$,

$$\left.\begin{aligned}A_1(a,r) &= \frac{\frac{3}{2}\,g\,M}{(p-1)(p-3)(p-5)a^2r^3}\{(r+a)^{3-p}[r^2+a^2-(3-p)ra]-(r-a)^{3-p}[r^2+a^2+(3-p)ra]\},\\ A_2(a,r) &= \frac{\frac{3}{2}\,g\,M}{(p-1)(p-3)(p-5)a^2r^3}\{(a+r)^{3-p}[a^2+r^2-(3-p)ar]-(a-r)^{3-p}[a^2+r^2+(3-p)ar]\},\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

og, naar det attraherede Punkt ligger i Kuglens Overflade,

$$A_1(r,r) = A_2(r,r) = \frac{\frac{3}{2}\,g\,M}{(p-1)(p-3)(p-5)r^p}[(p-1)\,2^{3-p}+(p-5)\,0^{3-p}]; \qquad (32)$$

men i Tilfældene $p=1$, $p=3$, $p=5$ blive Udtrykkene logarithmiske, nemlig:

$$\left.\begin{aligned}p=1,\ f(u) &= \frac{g}{u},\ \psi(u)=\frac{g}{4}u^2(2lu-1),\ \psi_1(u)=\frac{g}{32}u^4(4lu-3),\\ A_1(a,r) &= \frac{3}{16}\frac{gM}{a^2r^3}\left[2ra(r^2+a^2)-(r^2-a^2)^2 l\frac{r+a}{r-a}\right],\\ A_2(a,r) &= \frac{3}{16}\frac{gM}{a^2r^3}\left[2ar(a^2+r^2)-(a^2-r^2)^2 l\frac{a+r}{a-r}\right],\\ A_1(r,r) &= A_2(r,r) = \frac{3}{4}\frac{gM}{r};\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned}p=3,\ f(u) &= \frac{g}{u^3},\ \psi(u)=-\frac{g}{2}lu,\ \psi_1(u)=-\frac{g}{8}u^2(2lu-1),\\ A_1(a,r) &= \frac{3}{8}\frac{gM}{a^2r^3}\left[(r^2+a^2)\,l\frac{r+a}{r-a}-2ra\right],\\ A_2(a,r) &= \frac{3}{8}\frac{gM}{a^2r^3}\left[(a^2+r^2)\,l\frac{a+r}{a-r}-2ar\right],\\ A_1(r,r) &= A_2(r,r) = \infty;\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

$$\left.\begin{aligned}
&p=5,\ f(u)=\frac{g}{u^5},\quad \psi(u)=\frac{g}{8}\frac{1}{u^2},\quad \psi_1(u)=\frac{g}{8}\,l\,u,\\
&A_1(a,r)=\frac{3}{8}\frac{gM}{a^2r^3}\left[\frac{(r^2+a^2)ra}{(r^2-a^2)^2}-\frac{1}{2}\,l\,\frac{r+a}{r-a}\right],\\
&A_2(a,r)=\frac{3}{8}\frac{gM}{a^2r^3}\left[\frac{(a^2+r^2)ar}{(a^2-r^2)^2}-\frac{1}{2}\,l\,\frac{a+r}{a-r}\right],\\
&A_1(r,r)=A_2(r,r)=\infty\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Som Exempler paa Anvendelse af Formlerne (31) og (32) kunne mærkes:

$$\left.\begin{aligned}
&p=-1, A_1(a,r)=gMa, && A_2(a,r)=gMa && A_1(r,r)=A_2(r,r)=gMr,\\
&p=0,\ \ A_1(a,r)=gM\frac{a(5r^2-a^2)}{5\,r^3}, && A_2(a,r)=gM\frac{5a^2-r^2}{5\,a^2}, && A_1(r,r)=A_2(r,r)=\tfrac{4}{5}gM,\\
&p=2,\ \ A_1(a,r)=gM\frac{a}{r^3}, && A_2(a,r)=\frac{gM}{a^2}, && A_1(r,r)=A_2(r,r)=\frac{gM}{r^2},\\
&p=4,\ \ A_1(a,r)=gM\frac{a}{(r^2-a^2)r^3}, && A_2(a,r)=\frac{gM}{(a^2-r^2)a^2}, && A_1(r,r)=A_2(r,r)=\infty\,.
\end{aligned}\right\}(36)$$

Er $3-p$ positiv, vil et paa Kuglens Overflade beliggende Punkt tiltrækkes henimod Centrum ved en Kraft, som ifölge (32) vil være bestemt ved

$$A_1(r,r)=A_2(r,r)=\frac{3.2^{2-p}}{(3-p)(5-p)}.\frac{gM}{r^p}.$$

Denne Tiltrækning er den samme, som vilde udöves af et enkelt Punkt beliggende i Kuglens Centrum, forsaavidt som dette Punkt havde en Masse liig Kuglens Masse multipliceret med Tallet $\frac{3.2^{2-p}}{(3-p)(5-p)}$. Dette Tal kan ikke blive $=1$ for andre Værdier af p, som gjöre $3-p$ positiv, undtagen $p=-1$ og $p=2$. Dette bevises let ved Undersögelse af den transcendente Ligning

$$F(p)=(3-p)(5-p)\,2^p-12=0.$$

Man har

$$\begin{aligned}
F'(p)&=\left[p^2-2\left(4-\frac{1}{l2}\right)p+15-\frac{8}{l2}\right]2^p\,l2\\
&=\left[p-\left(4-\frac{1}{l2}+\sqrt{1+\frac{1}{(l2)^2}}\right)\right]\left[p-\left(4-\frac{1}{l2}-\sqrt{1+\frac{1}{(l2)^2}}\right)\right]2^p\,l2\\
&=(p-4{,}312688)(p-0{,}801922)\,2^p\,l2,
\end{aligned}$$

hvoraf sees, at Ligningen $F(p) = 0$ har endnu en tredie reel Rod foruden $p = -1$ og $p = 2$, men da den falder mellem 5 og 6, og saaledes gjör $3 - p$ negativ, kan den ikke komme i Betragtning. Antages overhoved en hvilkensomhelst Attractionslov $f(u)$, kan den resulterende Tiltrækning bestemmes ved at udvikle $f(u)$ efter Potentser af u og beregne Tiltrækningens Störrelse for hvert Led særskilt ifölge (31) i Forbindelse med (33), (34), (35), hvorefter man igjen tager Summen af alle disse enkelte Tiltrækninger. Det vil da indsees, at Tiltrækningsloven

$$f(u) = G\,u + \frac{g}{u^2}$$

er den eneste, for hvilken Kuglen tiltrækker et Punkt paa dens Overflade paa selv samme Maade, som hvis hele Kuglens Masse var samlet i dens Centrum, og ligesaa hvis det tiltrukne Punkt er beliggende hvorsomhelst udenfor Kuglen, hvorimod Sætningen alene gjælder for $f(u) = G\,u$, naar Punktet er indvendigt. Udtrykkene (31) give nemlig ved Rækkeudvikling:

$$\left.\begin{aligned} A_1(a,r) &= \frac{g\,M\,a}{r^{p+1}}\left[1 + \frac{(p-2)(p+1)}{10}\frac{a^2}{r^2} + \dots\right], \\ A_2(a,r) &= \frac{g\,M}{a^p}\left[1 + \frac{(p-2)(p+1)}{10}\frac{r^2}{a^2} + \dots\right], \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

som kun reduceres til $\frac{g\,M}{a^p}$ den förste for $p = -1$, den anden for $p = -1$ og $p = 2$. Det er indlysende, at disse Resultater endnu gjælde, naar Kuglen er heterogen, saaledes at den bestaaer af homogene concentriske Lag, idet Tætheden varierer som en hvilkensomhelst, continuert eller discontinuert, Function af Afstanden fra Centrum, altsaa og naar det tiltrækkende Legeme er en Kugleskal, indsluttet af to concentriske Kugleflader, enten homogen eller heterogen paa den anförte Maade. *Laplace* har godtgjort den samme Sætning uden Hjælp af Rækkeudviklinger, men alene for et udvendigt beliggende Punkt*). Han har sammesteds beviist,

*) Traité de mécanique céleste, T. I, pag. 142.

at alle de Tiltrækninger, som en Kugleskal af den omtalte Beskaffenhed udöver paa et Punkt beliggende indenfor den inderste Flade, alene i det Tilfælde kunne holde hinanden i Ligevægt, naar Attractionsloven er den, som Naturen fölger, nemlig fremstillet ved $f(u) = \frac{g}{u^2}$. Rigtigheden af denne Sætning indsees ligefrem ved Betragtning af Rækkeudviklingen (37) for $A_1(a, r)$, som naar $M = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3$ indsættes vil indeholde r undtagen i det ene Tilfælde $p = 2$, som giver $A_1(a, r) = \frac{4}{3}\pi\varrho g a$ (jvfr. (36)), uafhængig af r. Kugleskallens Tiltrækning, som er liig med $A_1(a, R) - A_1(a, r)$, hvor R og r ere Radierne af den ydre og indre Grændseflade, kan altsaa kun i dette ene Tilfælde reduceres til 0. Kugleskallen er vel her forudsat homogen, men det er indlysende, at det samme maa gjælde, naar den er sammensat af homogene concentriske Lag, hvis Tæthed varierer ved Overgangen fra et Lag til et fölgende. — Af (32) i Forbindelse med (33), (34) og (35) sees, at naar $3-p$ er enten 0 eller negativ, vil Tiltrækningen, som Kuglen udöver paa et Punkt beliggende paa dens Overflade, være uendelig stor, hvorimod denne Tiltrækning stedse er endelig, naar $3-p$ er positiv. Dette maa forklares af det stærkere Forhold, hvorefter i förste Tilfælde Attractionen mellem to Punkter er voxende, naar disse Punkters Afstand formindskes, og skyldes de nærmest omgivende Punkter af Kuglens Masse, hvormed det tiltrukne Punkt er i Beröring. Er dette Punkt indvendigt, vil baade den indenfor liggende Kugle, hvis Radius er liig Punktets Afstand fra Centrum, og den omgivende Kugleskal frembringe en uendelig Tiltrækning; men, idet disse to Kræfter gaae i modsat Retning, udkommer en endelig Differents som resulterende Kraft. Naar derimod det tiltrukne indvendige Punkt rykkes stedse nærmere ud imod Overfladen, maa den resulterende Tiltrækning voxe i det uendelige, efterdi den omgivende Kugleskal bestandigen aftager og convergerer til 0.

8. Betegnes de tre retvinklede Coordinater til et vilkaarligt Punkt

i en tiltrækkende Masse ved x, y, z, Coordinaterne til det tiltrukne Punkt ved a, b, c, Massens Tæthed ved ϱ, som almindeligen er en Function af x, y, z, og antages Tiltrækningen som Function af Afstanden u at være som forhen $f(u)$, saa erholdes Resultanten af alle Tiltrækningerne oplöst parallelt med Axerne x, y, z ved Hjælp af de tredobbelte Integraler:

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint \frac{a-x}{u} f(u)\, \varrho\, dx\, dy\, dz, \\ B &= \iiint \frac{b-y}{u} f(u)\, \varrho\, dx\, dy\, dz, \\ C &= \iiint \frac{c-z}{u} f(u)\, \varrho\, dx\, dy\, dz, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

idet

$$u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}, \tag{39}$$

disse Composanter regnede positive eller negative, eftersom de virke til at formindske eller forøge de tilsvarende Coordinater a, b, c d. e. til at give disse negative eller positive Tilvæxter. Sættes

$$\varphi(u) = \int f(u)\, du, \quad T = \iiint \varphi(u)\, \varrho\, dx\, dy\, dz, \tag{40}$$

kunne A, B, C ogsaa erholdes ved

$$A = \frac{dT}{da}, \quad B = \frac{dT}{db}, \quad C = \frac{dT}{dc}. \tag{41}$$

Ethvert af de tredobbelte Integraler udstrækkes til de yderste Grændser for den tiltrækkende Masse. Antages denne Masse homogen og af ellipsoidisk Form med tre ulige Halvaxer α, β, γ, sættes desuden Attractionsloven $f(u) = \frac{g}{u^p}$, saa haves Massens Overflade bestemt ved Ligningen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \tag{42}$$

og Composanten A bestemt iflg. (38) saaledes:

$$A = g\varrho \iiint \frac{(a-x)\,dx\,dy\,dz}{\left[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right]^{\frac{p+1}{2}}} \tag{43}$$

udstrukket til alle de Elementer, som give

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 \overset{=}{<} 1, \tag{44}$$

og i Analogie hermed haves B og C, men lettere findes A ved

$$A=-\frac{g\varrho}{p-1}\frac{dT}{da},\ T=\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\left[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}}, \tag{45}$$

dette Integral T udstrukket til de samme Elementer som A. Udtrykket for A har *Lejeune-Dirichlet**) paa en meget ingeniös Maade reduceret til et enkelt Integral, men da dette Resultat, som han har fremsat som almindeligt gjældende, er stöttet paa Formlen (11), idet intet Hensyn er taget til de extraordinære Integraler, er det ikke umiddelbart anvendeligt uden for posttive Værdier af $p \overset{=}{>} 2$. Reductionen er denne. Ifölge (9) maa Udtrykket (45) for T være det samme som den reelle Deel af

$$T'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right]\varphi\sqrt{-1}}\,dx\,dy\,dz}{\left[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}} \tag{46}$$

eller A maa være liig den reelle Deel af

$$A'=-\frac{g\varrho}{p-1}\cdot\frac{dT'}{da}. \tag{47}$$

Ifölge (11) haves, naar $n=\dfrac{p-1}{2}$ er positiv,

$$\frac{1}{\left[(x-a)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right]^{\frac{p-1}{2}}}=\frac{e^{-\frac{p-1}{4}\pi\sqrt{-1}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}e^{(a^2+b^2+c^2)\theta\sqrt{-1}}e^{(x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz)\theta\sqrt{-1}}\theta^{\frac{p-1}{2}-1}d\theta.$$

Dette indsat i (46) giver

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, 1839, 1er sem, Nr. 5.

$$T' = \frac{2e^{-\frac{p-1}{4}\pi\sqrt{-1}}}{\pi\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi\int_0^\infty e^{(a^2+b^2+c^2)\theta\sqrt{-1}}\theta^{\frac{p-1}{2}-1}Q\,d\theta, \tag{48}$$

idet

$$Q=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left[x^2\left(\theta+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)-2a\theta x\right]\sqrt{-1}}dx.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left[y^2\left(\theta+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)-2b\theta y\right]\sqrt{-1}}dy.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left[z^2\left(\theta+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)-2c\theta z\right]\sqrt{-1}}dz.$$

Som bekjendt er $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$. **Altsaa, ved at sætte** $t=\lambda x+\mu$, $-\lambda^2=h\sqrt{-1}$, $-\lambda\mu=k\sqrt{-1}$, **haves***)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(hx^2+2kx)\sqrt{-1}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-h\sqrt{-1}}}e^{-\frac{k^2}{h}\sqrt{-1}}.$$

Fölgelig er

$$Q=\pi\sqrt{\pi}\sqrt{-1}\;e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\frac{e^{-\left[\frac{a^2\theta^2}{\theta+\frac{\varphi}{\alpha^2}}+\frac{b^2\theta^2}{\theta+\frac{\varphi}{\beta^2}}+\frac{c^2\theta^2}{\theta+\frac{\varphi}{\gamma^2}}\right]\sqrt{-1}}}{\sqrt{\left(\theta+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\theta+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\theta+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}.$$

Indsættes dette i (48) og sættes $\theta=\frac{\varphi}{s}$, **erholdes** T' **og deraf ifölge (47)** A', **nemlig**

$$\left.\begin{aligned}A'&=\frac{4g\varrho a}{\alpha^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{p-2}{4}\pi\sqrt{-1}}}{(p-1)\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}d\varphi,\\ \sigma&=\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}.\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

---

*) Ifölge en Undersögelse af Cauchy er overhoved $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-c+\frac{b^2}{4a}}$, hvor a, b, c kunne være reelle eller imaginære, dog at den reelle Deel af a er positiv (Exercices de mathém., T. II, pag. 233).

For heraf at udlede A, maa man bestemme den reelle Deel P af Udtrykket

$$P' = e^{-\frac{p-2}{4}\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}} \frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}} d\varphi. \tag{50}$$

Naar $\frac{p}{2} - 1$ er positiv, haves ifölge (11), ved at betjene sig af det exponentielle Udtryk for $\sin\varphi$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{for } \sigma > 1 \quad P' = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{2\sqrt{-1}}\left[(\sigma+1)^{1-\frac{p}{2}} - (\sigma-1)^{1-\frac{p}{2}}\right], \\ &\text{for } \sigma < 1 \quad P' = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{2\sqrt{-1}}\left[(\sigma+1)^{1-\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p-2}{2}\pi\sqrt{-1}}(1-\sigma)^{1-\frac{p}{2}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

altsaa

$$\left.\begin{aligned} &\text{for } \sigma > 1 \quad P = 0, \\ &\text{for } \sigma < 1 \quad P = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right).\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.(1-\sigma)^{1-\frac{p}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Dernæst findes

$$A = \frac{4g\varrho a}{\alpha^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \frac{P s^{1-\frac{p}{2}} ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}. \tag{53}$$

Ligger det attraherede Punkt indenfor Ellipsoidens Overflade, saa er

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} < 1,$$

altsaa $\sigma < 1$, saa at man har ifölge (53), idet P bestemmes ved den anden (52):

$$A_1 = \frac{2g\varrho a}{\alpha^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{s^{1-\frac{p}{2}}\left(1 - \frac{a^2}{\alpha^2+s} - \frac{b^2}{\beta^2+s} - \frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}} ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}, \tag{54}$$

da vi nemlig ved A_1 og A_2 betegne Værdierne af A respective for et indvendigt og udvendigt attraheret Punkt. Er Punktet udvendigt, saa er

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}>1,$$

fölgelig $\sigma>1$ eller $\sigma<1$, eftersom $s<\lambda$ eller $s>\lambda$, idet λ er den enkelte positive Rod i den cubiske Ligning $\sigma=1$ d. e.

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\varpi}+\frac{b^2}{\beta^2+\varpi}+\frac{c^2}{\gamma^2+\varpi}=1. \tag{55}$$

Elementerne af Integralet (53) fra $s=0$ til $s=\lambda$ forsvinde itölge den förste (52), saa at man erholder

$$A_2=\frac{2g\varrho a}{\alpha^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\cdot\int_\lambda^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}. \tag{56}$$

Da Ligning (55) er tilfredsstillet for $\varpi=\lambda$, haves

$$1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}=\frac{a^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{b^2}{\beta^2+\lambda}+\frac{c^2}{\gamma^2+\lambda}-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}$$

$$=\frac{a^2(s-\lambda)}{(\alpha^2+\lambda)(\alpha^2+s)}+\frac{b^2(s-\lambda)}{(\beta^2+\lambda)(\beta^2+s)}+\frac{c^2(s-\lambda)}{(\gamma^2+\lambda)(\gamma^2+s)}.$$

Fölgelig, ved at sætte

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2+\lambda=\alpha'^2,\quad \beta^2+\lambda=\beta'^2,\quad \gamma^2+\lambda=\gamma'^2,\\ &\frac{a\alpha}{\alpha'}=a',\qquad \frac{b\beta}{\beta'}=b',\qquad \frac{c\gamma}{\gamma'}=c',\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

haves

$$s\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)=(s-\lambda)\left[\frac{a^2s}{\alpha'^2(\alpha^2+s)}+\frac{b^2s}{\beta'^2(\beta^2+s)}+\frac{c^2s}{\gamma'^2(\gamma^2+s)}\right]$$

$$=(s-\lambda)\left(1-\frac{a'^2}{\alpha^2+s}-\frac{b'^2}{\beta^2+s}-\frac{c'^2}{\gamma^2+s}\right),$$

efterdi $1=\frac{a^2}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{\beta'^2}+\frac{c^2}{\gamma'^2}$. Altsaa, naar Integralet (56) transformeres ved at sætte $s=\lambda+u$ og igjen skrive s for u, erholdes

$$A_2=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}\cdot\frac{2g\varrho a'}{\alpha'^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\cdot\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}\left(1-\frac{a'^2}{\alpha'^2+s}-\frac{b'^2}{\beta'^2+s}-\frac{c'^2}{\gamma'^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}. \tag{58}$$

Ligger Punktet paa Overfladen selv, haves $\lambda=0$, fölgelig $A_1=A_2$.

9. Formlerne (54) og (58) for A_1 og A_2, tilligemed de analoge for Composanterne efter de andre Axer, B_1 og B_2, C_1 og C_2, tjenende til at bestemme den Tiltrækning, en homogen Ellipsoide udöver paa et indvendigt eller udvendigt Punkt, ere af *Lejeune-Dirichlet* fremsatte som almindeligt gjældende. Dette kunne de imidlertid först blive, naar man ifölge de extraordinære Integralers Theorie fastsætter visse Modificationer med Hensyn deels til Functionen Γ deels til Integralerne med Hensyn til s. Den umiddelbare Anvendelse af Formlerne (54) og (58) er nödvendigen bunden til de Indskrænkninger, som vi i Beviisförelsen selv have antydet paa de to Steder, hvor Formlen (11) er bleven benyttet, at nemlig först $\frac{p-1}{2}$ og dernæst ogsaa $\frac{p}{2}-1$ ere positive, altsaa idet den anden Betingelse involverer den förste, at overhoved p er positiv >2; men selv under denne Forudsætning ville vi see, at de anvendte bestemte Integraler kunne medföre en Indskrænkning med Hensyn til de Elementer af Integralerne (54) og (58), som svare til $s=0$ og til Værdier af s uendelig nær ved 0. Gyldigheden af Formlerne (54) og (58) vil overhoved let kunne pröves ved at sammenholde dem med de Resultater, som forhen paa anden Maade ere fundne for visse specielle Tilfælde. Disse Tilfælde ere Ellipsoidens Attraction for Værdierne $p=2$ og $p=-1$, og Kuglens Attraction for hvilkensomhelst Værdie af p. I det förste af disse Tilfælde ere Formlerne ligefrem gjældende, thi ifölge (22) er

$$\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)},$$

som for $p=2$ reduceres til $\frac{\pi}{\Gamma(1)}=\pi$, og til samme Tid er $\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)$ $=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, saa at $p=2$ giver

$$\frac{\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}=\pi,$$

hvorved Formlerne (54) og (58) reduceres til de forhen bekjendte, som haves for Tiltrækning omvendt som Qvadratet af Afstanden:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= g\varrho\frac{2\pi a}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}, \\ A_2 &= g\varrho\frac{2\pi a'}{\alpha'^2}\cdot\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Naar $p=-1$ d. e. naar Tiltrækningen mellem to Punkter forholder sig ligefrem som Afstanden, vil en hvilkensomhelst Masse tiltrække et enkelt Punkt ganske paa samme Maade, som hvis hele Massen var samlet i Tyngdepunktet. Formlerne (38) give nemlig, ved at sætte $f(u)=gu$,

$$\left.\begin{aligned} A &= g\iiint (a-x)\varrho\,dx\,dy\,dz = gM(a-x_1), \\ B &= g\iiint (b-y)\varrho\,dx\,dy\,dz = gM(b-y_1), \\ C &= g\iiint (c-z)\varrho\,dx\,dy\,dz = gM(c-z_1), \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

hvor M betegner den tiltrækkende Masse, x_1, y_1, z_1 betegne Coordinaterne til dens Tyngdepunkt. For den homogene Ellipsoide, hvis Tæthed $=\varrho$, og hvis Overflade er bestemt ved Ligning (42), haves $M=\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$, $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, saa at Formlerne (60) reduceres til

$$A=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma a,\quad B=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma b,\quad C=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma c. \qquad (61)$$

Fölgelig maae Formlerne (54) og (58) for $p=-1$ give

$$A_1=A_2=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma a.$$

Dette udkommer ogsaa ved at sætte $p=2n-1$ og derefter lade n convergere til 0. Man har ifölge (19)

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma(n-1)=\frac{\Gamma(n+1)}{n(n-1)},\quad \Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\Gamma(n-\tfrac{3}{2})=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})},$$

som for $p=-1$ eller $n=0$ give

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\frac{1}{n},\quad \Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

Tillige er $\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi=1$. Formlen (54) vil altsaa give

$$A_1=\frac{g\varrho a}{\alpha^2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi\int_0^\infty\frac{n\,s^{-n+\frac{3}{2}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{-n+\frac{3}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.\qquad(62)$$

Idet n convergerer til 0, bringes alle Elementer af dette Integral svarende til endelige Værdier af s til at forsvinde, men for $s=\infty$ vil Udtrykket under Integraltegnet reduceres til

$$\alpha^3\beta\gamma n s^{-n-1}ds.$$

Man har fölgelig, idet k betegner en vilkaarlig endelig Störrelse,

$$A_1=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\,\alpha\beta\gamma\,a\int_k^\infty n s^{-n-1}ds=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\,\alpha\beta\gamma\,a,$$

efterdi $\int_k^\infty n s^{-n-1}ds=\left\{-s^{-n}\right\}_k^\infty=k^{-n}$, som reduceres til 1, naar n convergerer til 0. For A_2 erholdes samme Værdie ifölge (56), hvor den lavere Integrationsgrændse er λ istedetfor at den i (54) er 0, men Resultatet er uafhængigt af denne Grændse, i hvis Sted man kan sætte den vilkaarlige Störrelse k. Det samme fölger ogsaa let af (58), efterdi

$$\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}.a'\alpha'\beta'\gamma'=\beta\gamma a'\alpha'=\alpha\beta\gamma a.$$

Det kan endnu bemærkes, at Integralet (62) ved at substituere $s=\frac{\alpha^2}{x^2}-\alpha^2$ transformeres til et andet med Hensyn til x mellem Grændserne 0 og 1. Man finder

$$A_1=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma a.\alpha^{-2n}\int_0^1\frac{2nx^{2n-1}(1-x^2)^{-n+\frac{3}{2}}\left[1-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}-\frac{b^2x^2}{(\beta^2-\alpha^2)x^2+\alpha^2}-\frac{c^2x^2}{(\gamma^2-\alpha^2)x^2+\alpha^2}\right]^{-n+\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{\left[1+\frac{(\beta^2-\alpha^2)x^2}{\alpha^2}\right]\left[1+\frac{(\gamma^2-\alpha^2)x^2}{\alpha^2}\right]}}.$$

Da nu Elementerne af dette Integral forsvinde med Undtagelse af dem, som ligge uendelig nær ved den lavere Grændse $x=0$, hvortil svarer $s=\infty$, og da x liig en uendelig lille Störrelse reducerer Udtrykket under Integraltegnet til $2nx^{2n-1}dx$, erholdes

$$A_1=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma a.\alpha^{-2n}\int_0^1 2nx^{2n-1}dx=\tfrac{4}{3}\pi g\varrho\alpha\beta\gamma a.\alpha^{-2n},$$

det samme som ovenfor, idet $n=0$ giver $\alpha^{-2n}=1$. Integralet (58) kan behandles paa aldeles lignende Maade.

10. Naar $\alpha=\beta=\gamma=r$, $b=c=0$, maae (54) og (58) reduceres til Udtrykkene (31) for Kuglens Attraction. Ifölge (55) og (57) haves:

$$\lambda=a^2-r^2,\ \alpha'=\beta'=\gamma'=a,\ a'=r,\ b'=c'=0. \tag{63}$$

Fölgelig, naar det indvendige og udvendige Punkts Afstand fra Kuglens Centrum betegnes respective a_1 og a_2, maa man have, ved Sammenligning af Formlerne (54) og (58) med (31):

$$\frac{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}\left(1-\frac{a_1^2}{r^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}ds}{\left(1+\frac{s}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,r^2}{(p-3)(p-5)a_1^3}\left\{(r+a_1)^{3-p}[r^2+a_1^2-(3-p)ra_1]-(r-a_1)^{3-p}[r^2+a_1^2+(3-p)ra_1]\right\},$$

$$\frac{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}\left(1-\frac{r^2}{a_2^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}ds}{\left(1+\frac{s}{a_2^2}\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,a_2^2}{(p-3)(p-5)r^3}\left\{(a_2+r)^{3-p}[a_2^2+r^2-(3-p)a_2r]-(a_2-r)^{3-p}[a_2^2+r^2+(3-p)a_2r]\right\}$$

Den anden af disse fremkommer af den förste ved blot Forandring af Constanterne a_1 og r til respective r og a_2. Sættes i den förste $s=\frac{r^2}{x^2}-r^2$ og $\frac{a_1}{r}=c$, eller i den anden $s=\frac{a_2^2}{x^2}-a_2^2$ og $\frac{r}{a_2}=c$, erholdes:

$$\int_0^1 x^p(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}(1-c^2x^2)^{1-\frac{p}{2}}\,dx=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{2(p-3)(p-5)\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right).c^3}\left\{\frac{1+(p-3)c+c^2}{(1+c)^{p-3}}-\frac{1-(p-3)c+c^2}{(1-c)^{p-3}}\right\} \quad (64)$$

hvor $c<1$ eller $c=1$. **Ved Udvikling i Række efter stigende Potentser af** c **haves**

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2c^3}\left\{\frac{1+(p-3)c+c^2}{(1+c)^{p-3}}-\frac{1-(p-3)c+c^2}{(1-c)^{p-3}}\right\}=P_0+P_2c^2+P_4c^4+\ldots P_{2i}c^{2i}+\ldots,\\ P_{2i}=(p-5)\frac{(p-3)(p-2)\ldots(p+2i-3)}{1.2\ldots 2i+1}.\frac{p+2i-1}{2i+3}.\end{array}\right\}$$

Fölgelig, naar begge Sider af Formlen (64) udvikles efter stigende Potentser af c **og Coefficienterne for** c^{2i} **i begge Udviklinger sættes ligestore, haves**

$$\frac{(p-2)p(p+2)\ldots(p+2i-4)}{2.4.6\ldots 2i}\int_0^1 x^{p+2i}(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{(p-3)\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}.\frac{(p-3)(p-2)\ldots(p+2i-3)}{1.2\ldots 2i+1}.\frac{p+2i-1}{2i+3},$$

altsaa

$$\int_0^1 x^{p+2i}(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}.\frac{(p-1)(p+1)(p+3)\ldots(p+2i-1)}{3.5.7\ldots 2i+3}. \quad (65)$$

Transformeres dette Integral ved at sætte $x^2=u$, **og bemærkes ifölge (21) at**

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right).\frac{p-1}{2}.\frac{p+1}{2}.\frac{p+3}{2}\ldots\frac{p+2i-1}{2}=\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+i\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\frac{2i+3}{2}=\Gamma\left(\frac{5}{2}+i\right),$$

hvor $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, **endvidere ifölge (22) at**

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi . \Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right),$$

saa bliver Formlen (65) reduceret til

$$\int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}+i}(1-u)^{1-\frac{p}{2}}du=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+i\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(\frac{5}{2}+i)}, \tag{66}$$

eller, ved at sætte $\frac{p+1}{2}+i=\lambda$, $2-\frac{p}{2}=\mu$,

$$\int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\mu-1}du=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}, \tag{67}$$

som er den bekjendte Relation mellem de Eulerske Integraler af 1ste og 2den Art. Det maa egentlig herved forudsættes, at λ og μ ere positive; men ved Hjælp af de extraordinære Integraler udvides Formlen (67) til de Tilfælde, hvor den ene af dem f. Ex. μ er negativ, medens $\lambda+\mu$ er positiv, hvilket netop stedse finder Sted ved Formlen (66), hvor $\frac{5}{2}+i$ altid er positiv. Dette vil let sees, naar Formlen (67) udledes paa Poissons*) Maade ved Transformationen af et Dobbelt-Integral. Man har nemlig

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda-1}\,dx,\quad \Gamma(\mu)=\int_0^\infty e^{-z}z^{\mu-1}\,dz,$$

altsaa

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)=\int_0^\infty dx\left[\int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda-1}e^{-z}z^{\mu-1}\,dz\right],$$

eller, idet Integralet med Hensyn til z transformeres ved at sætte $z=xy$, $dz=x\,dy$,

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)=\int_0^\infty dx\left[\int_0^\infty e^{-x(1+y)}x^{\lambda+\mu-1}y^{\mu-1}dy\right]$$

eller ved Ombytning af Integrations-Ordenen

*) Journ. de l'éc. polyt., 19me cah., pag. 477.

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)=\int_0^\infty dy\left[\int_0^\infty e^{-x(1+y)}x^{\lambda+\mu-1}y^{\mu-1}dx\right].$$

Transformeres dernæst Integralet med Hensyn til x ved at sætte $x=\frac{t}{1+y}$, $dx=\frac{dt}{1+y}$, erholdes

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)=\int_0^\infty dy\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{\lambda+\mu-1}\,\frac{y^{\mu-1}}{(1+y)^{\lambda+\mu}}\,dt\right]$$

eller

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)=\Gamma(\lambda+\mu)\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{\lambda+\mu}}.$$

Transformeres endeligen dette sidste Integral ved at sætte $y=\frac{1-u}{u}$, erholdes Formlen (67) som gjældende ogsaa for μ negativ, medens $\lambda+\mu$ er positiv, idet man udelukker de Led i Udviklingerne under Integraltegnene efter stigende Potentser af z, y, u, som efter Integrationerne vilde blive uendelige. Da λ og μ kunne ombyttes i Formlen (67), kan ogsaa λ være negativ, medens μ og $\lambda+\mu$ ere positive.

11. Er p et heelt Tal, lige negativt eller ulige positivt, kan Integralet, som danner venstre Side af Formlen (64), bestemmes under endelig Form, og derved Rigtigheden af denne Formel pröves directe. Antag först $p=-2n$, hvor n er positiv heel eller 0. Ifölge (21) haves

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma[-(n+1)+\tfrac{1}{2}]=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{[-(n+1)+\frac{1}{2}][-n+\frac{1}{2}][-n+1+\frac{1}{2}]\ldots[-\frac{1}{2}]}$$

eller

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1}\sqrt{\pi}}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots1},$$

og ifölge (22) er

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)=\Gamma(n+2)=1.2.3\ldots(n+1).$$

Altsaa haves

$$\frac{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=(-1)^{n+1}2^{n+1}\frac{1.2.3\ldots n+1}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

saa at (64) giver

$$\int_0^1\frac{(1-x^2)^{n+1}(1-c^2x^2)^{n+1}}{x^{2n}}dx=(-1)^{n+1}2^n\frac{1.2.3\ldots n+1}{1.3.5.7\ldots 2n+5}.\frac{1}{c^3}\left\{\begin{array}{l}[1-(2n+3)c+c^2](1+c)^{2n+3}\\-[1+(2n+3)c+c^2](1-c)^{2n+3}\end{array}\right\} \quad (68)$$

F. Ex. $n=0$ reducerer höire Side af denne Ligning til

$$\tfrac{2}{3}(1-\tfrac{1}{5}c^2),$$

og ved umiddelbar Integration haves

$$\int(1-x^2)(1-c^2x^2)\,dx=x-\tfrac{1}{3}(1+c^2)x^3+\tfrac{1}{5}c^2x^5,$$

fölgelig

$$\int_0^1(1-x^2)(1-c^2x^2)\,dx=\tfrac{2}{3}(1-\tfrac{1}{5}c^2),$$

saa at (68) er tilfredsstillet. Derimod for $n=1$, $n=2$, $n=3$,... er venstre Side af (68) uendelig, men Formlen bliver gyldig, naar det extraordinære Integral sættes istedet. Saaledes haves for $n=1$ ved umiddelbar Integration

$$\int\frac{(1-x^2)^2(1-c^2x^2)^2}{x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{x}-2(1+c^2)x+\frac{1}{3}(1+4c^2+c^4)x^3\\-\frac{2}{5}c^2(1+c^2)x^4+\frac{1}{7}c^4x^7,\end{array}\right.$$

altsaa ved Udelukkelse af det uendelige Led, som fremkommer ved $-\frac{1}{x}$ for $x=0$,

$$\int_0^1\frac{(1-x^2)^2(1-c^2x^2)^2}{x^2}dx=-\tfrac{8}{3}[1+\tfrac{2}{5}c^2-\tfrac{1}{35}c^4],$$

hvortil ogsaa höire Side af (68) reduceres ved $n=1$. Ligeledes haves for $n=2$ ved Integration

$$\int\frac{(1-x^2)^3(1-c^2x^2)^3}{x^4}dx=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{3x^3}+\frac{3(1+c^2)}{x}+3(1+3c^2+c^4)x-\frac{1}{3}(1+9c^2+9c^4+c^6)x^3\\+\frac{3}{5}c^2(1+3c^2+c^4)x^5-\frac{3}{7}c^4(1+c^2)x^7+\frac{1}{9}c^6x^9,\end{array}\right.$$

altsaa ved Udelukkelse af de uendelige Led, som fremkomme ved $-\frac{1}{3x^3}+\frac{3(1+c^2)}{x}$ for $x=0$,

$$\int_0^{1}\frac{(1-x^2)^3(1-c^2x^2)^3}{x^4}dx=16(\tfrac{1}{3}+\tfrac{3}{5}c^2+\tfrac{3}{35}c^4-\tfrac{1}{315}c^6),$$

hvortil ogsaa höire Side af (68) reduceres for $n=2$. Disse Exempler ere tilstrækkelige til at vise, hvorledes det bestemte Integral, venstre Side af Formel (68), maa behandles, for at denne Formel kan være fyldestgjort. Det fremgaaer heraf, at dette Integral ogsaa kan fremstilles ved

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{n+1}(1-c^2x^2)^{n+1}}{x^{2n}}dx,$$

hvis Værdie er endelig og fremstillet ved höire Side af Formel (68), men tillige sees, at dette Integral, taget fra -1 til $+1$, ikke er at ansee som Summen af Elementerne i dette Interval, men som Differentsen mellem det fuldstændige Integrals Værdier for disse Grændser*). — Antag dernæst $p=2n+1$, hvor n som forhen er positiv heel eller 0. Man har da

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1),$$

$$\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi=\sin(n-\tfrac{1}{2})\pi=(-1)^{n+1},$$

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\Gamma(n-\tfrac{1}{2})=(n-\tfrac{3}{2})(n-\tfrac{5}{2})(n-\tfrac{7}{2})\ldots\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots1.\sqrt{\pi},$$

altsaa

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{2(p-3)(p-5).\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=(-1)^{n+1}2^{n-4}.\frac{1.2.3\ldots(n-3)}{1.3.5\ldots2n-3}.$$

Tillige haves, ved at sætte $x^2=\frac{1-u^2}{1-c^2u^2}$,

*) Jvfr. min *Differential- og Integral-Regning*, Pag. 72.

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)^{2n-1}(1-c^2x^2)^{2n-1}}} = \frac{1}{(1-c^2)^{2n-2}}\int_0^1 \frac{(1-u^2)^n(1-c^2u^2)^{n-3}}{u^{2n-2}}du.$$

Formlen (64) giver altsaa

$$\frac{1}{(1-c^2)^{2n-2}}\int_0^1 \frac{(1-u^2)^n(1-c^2u^2)^{n-3}}{u^{2n-2}}du = (-1)^{n+1}2^{n-4}.\frac{1.2.3\ldots n-3}{1.3.5\ldots 2n-3}.\frac{1}{c^3}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1+(2n-2)c+c^2}{(1+c)^{2n-2}}\\ -\dfrac{1-(2n-2)c+c^2}{(1-c)^{2n-2}}\end{array}\right\} \quad (69)$$

Bröken $\dfrac{1.2.3\ldots n-3}{1.3.5\ldots 2n-3}$ multipliceret i Tæller og Nævner deels med $(n-2)(n-1)n(n+1)$ deels med $(2n-1)(2n+1)$ bringes under Formen

$$\frac{1.2.3\ldots(n+1)}{1.3.5\ldots(2n+1)}.\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-2)(n-1)n(n+1)},$$

som kan anvendes i Tilfældene $n=0,1,2,3$. For $n=0$ haves ved umiddelbar Integration

$$\int \frac{u^2du}{(1-c^2u^2)^3} = \frac{1}{16c^3}\left[-l\frac{1+cu}{1-cu} - \frac{1}{1-cu} + \frac{1}{1+cu} + \frac{1}{(1-cu)^2} - \frac{1}{(1+cu)^2}\right],$$

hvoraf

$$(1-c^2)^2\int_0^1 \frac{u^2du}{(1-c^2u^2)^3} = \frac{1}{16c^2}\left[2(1+c^2) - \frac{(1-c^2)^2}{c}l\frac{1+c}{1-c}\right],$$

hvortil ogsaa höire Side af (69) reduceres ved $n=0$, nemlig, idet $2n=x=0$,

$$\frac{[(1-c)^2+cx](1+c)^{2-x}-[(1+c)^2-cx](1-c)^{2-x}}{16c^3x},$$

som bestemmes ved Methoden for $\frac{0}{0}$ (jvfr. (33)). For $n=1$ findes

$$\int \frac{(1-u^2)du}{(1-c^2u^2)^2} = \frac{1}{4c^3}\left[(1+c^2)l\frac{1+cu}{1-cu} + (1-c^2)\left(\frac{1}{1+cu} - \frac{1}{1-cu}\right)\right],$$

altsaa

$$\int_0^1 \frac{(1-u^2)du}{(1-c^2u^2)^2} = \frac{1}{4c^2}\left[\frac{1+c^2}{c}l\frac{1+c}{1-c} - 2\right],$$

som ogsaa er Værdien af höire Side af (69), bestemt ved Methoden for $\frac{0}{0}$, nemlig, idet her $2n-2=x=0$,

$$-\frac{(1+c^2+cx)(1+c)^{-x}-(1+c^2-cx)(1-c)^{-x}}{4c^3x}$$

(jvf. (34)). For $n=2$ haves

$$\int\frac{(1-u^2)^2}{1-c^2u^2}\cdot\frac{du}{u^2}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{(1-c^2)^2}{2c}l\frac{1+cu}{1-cu}-u-\frac{c^2}{u}\right],$$

altsaa, ved Udelukkelse af det uendelige Led hidrörende fra $-\frac{1}{u}$ for $u=0$,

$$\frac{1}{(1-c^2)^2}\int_0^1\frac{(1-u^2)^2}{1-c^2u^2}\cdot\frac{du}{u^2}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2c}l\frac{1+c}{1-c}-\frac{1+c^2}{(1-c^2)^2}\right],$$

som ogsaa er Værdien af höire Side af (69), bestemt ved Methoden for $\frac{0}{0}$, nemlig, idet $2n-4=x=0$,

$$-\frac{[(1+c)^2+cx](1+c)^{-2-x}-[(1-c)^2-cx](1-c)^{-2-x}}{2c^3x}$$

(jvf. (35)). For $n=3$ haves

$$\int\frac{(1-u^2)^3}{u^4}du=-\frac{1}{3u^3}+\frac{3}{u}+3u-\frac{1}{3}u^3,$$

altsaa, ved Udelukkelse af de uendelige Led $-\frac{1}{3u^3}+\frac{3}{u}$ for $u=0$,

$$\frac{1}{(1-c^2)^4}\int_0^1\frac{(1-u^2)^3}{u^4}du=\frac{16}{3(1-c^2)^4},$$

som ogsaa er Værdien af höire Side af (69). Af disse Exempler sees, at venstre Side af (69) ogsaa kan skrives saaledes:

$$\frac{1}{2(1-c^2)^{2n-2}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^n(1-c^2u^2)^{n-3}}{u^{2n-2}}du,$$

hvorved de uendelige Led blive umiddelbart udelukkede. — For $p=2n$, hvor n er positiv heel, haves

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma(n-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2^{n-1}}(2n-3)(2n-5)\ldots1.\sqrt{\pi},$$

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi.\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)=\Gamma(2-n)=\frac{\Gamma(1)}{(2-n)(3-n)\ldots(n-n)}$$

$$=\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n-2}\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

idet for n er taget $n-\varepsilon$, hvor ε betragtes som forsvindende. Formlen (64) giver fölgelig

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon\, x^{2n-2\varepsilon}dx}{(1-x^2)^{n-1-\varepsilon}(1-c^2x^2)^{n-1-\varepsilon}} = \frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{1.3.5...2n-7}{1.2.3...n-2}\cdot\frac{1}{c^3}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1+(2n-3)c+c^2}{(1+c)^{2n-3}}\\ -\dfrac{1-(2n-3)c+c^2}{(1-c)^{2n-3}}\end{array}\right\}. \quad (70)$$

For $p=-2n+1$, hvor n er positiv heel, haves

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\Gamma(-n-\tfrac{1}{2})=\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

$$\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi=(-1)^{n+1},$$

saa at (64) giver:

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}-\varepsilon}(1-c^2x^2)^{n+\frac{1}{2}-\varepsilon}}{x^{2n-1-2\varepsilon}}dx =$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+4}}\cdot\frac{1.3.5...2n+1}{1.2.3...n+2}\cdot\frac{1}{c^3}\{[1-(2n+2)c+c^2](1+c)^{2n+2}-[1+(2n+2)c+c^2](1-c)^{2n+2}\}. \quad (71)$$

Venstre Side af Formlerne (70) og (71) kunne ikke ved umiddelbar Integration erholdes fremstillede under endelig Form, undtagen den förste i Tilfældene $n=1$ og $n=2$, den anden i Tilfældet $n=1$. Factoren $\frac{1.3.5...2n-7}{1.2.3...n-2}$ i höire Side af (70) kan skrives

$$\frac{1.3.5...2n-1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)},$$

som for $n=1$ er $=-\frac{\varepsilon}{3}$, hvorved Formlen (70) bliver fyldestgjort, nemlig

$$\int_0^1 \varepsilon\, x^2 dx = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Störrelsen ε er iövrigt her overflödig, thi $p=2$ giver umiddelbart

$$\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},$$

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi\cdot\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}=\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)=\Gamma(1)=1,$$

altsaa ifölge (64) $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$. For $n=2$ reduceres höire Side af (70) til

$$\frac{1}{2(1-c^2)}.$$

Venstre Side er

$$\int_0^1 \varepsilon\, x^{4-2\varepsilon}(1-x^2)^{-1+\varepsilon}(1-c^2x^2)^{-1+\varepsilon}\,dx.$$

Elementerne af dette Integral ere forsvindende med Undtagelse af dem, som ligge uendelig nær ved den höiere Grændse. Man kan fölgelig sætte $x=1-y$, hvor y er uendelig lille, og integrere fra $y=0$ til $y=k$, som betegner en vilkaarlig endelig Störrelse. Dette giver

$$\int_0^k \varepsilon(2y)^{-1+\varepsilon}(1-c^2)^{-1+\varepsilon}dy=\frac{\int_0^k \varepsilon\, y^{-1+\varepsilon}\,dy}{2(1-c^2)}=\frac{k^\varepsilon}{2(1-c^2)}=\frac{1}{2(1-c^2)},$$

saa at Formlen (70) er fyldestgjort. For $n=1$ reduceres höire Side af (71) til $\frac{1}{2}$. Dette er ogsaa Værdien af venstre Side, nemlig

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(1-c^2x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}{x^{1-2\varepsilon}}\,dx.$$

Elementerne af dette Integral ere forsvindende med Undtagelse af dem, som ligge uendelig nær ved den lavere Grændse. Man kan fölgelig betragte x under Integraltegnet som uendelig lille og derefter tage den vilkaarlige Störrelse k som höiere Grændse, hvilket giver:

$$\int_0^k \varepsilon\, x^{-1+2\varepsilon}\,dx=\frac{k^{2\varepsilon}}{2}=\frac{1}{2}.$$

12. Transformeres Integralet (54) og de tilsvarende i Udtrykkene for B_1 og C_1 (Composanterne efter y'nes og z'nes Axe) ved at sætte

$$s=\frac{\alpha^2}{x^2}-\alpha^2,$$

og bemærkes, at

$$\frac{p-1}{2}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),\quad \sin\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi\cdot\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)},$$

erholdes

$$A_1=gMA'a,\quad B_1=gMB'b,\quad C_1=gMC'c,\tag{72}$$

idet A', B', C' ere saaledes bestemte:

$$\left.\begin{aligned}
{}'&=\frac{1}{\alpha^{1+p}}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^1\frac{x^p(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}\left[1-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}-\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}},\\
{}'&=\frac{1}{\alpha^{1+p}}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^1\frac{x^p(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}\left[1-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}-\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}},\\
{}'&=\frac{1}{\alpha^{1+p}}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^1\frac{x^p(1-x^2)^{1-\frac{p}{2}}\left[1-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}-\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3}}.
\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

Formlen (58) viser, at naar det tiltrukne Punkt er udvendigt, maae deels i Factoren M deels i Udtrykkene for A', B', C' Störrelserne a, b, c, α, β, γ forandres til a', b', c', α', β', γ', og derefter det udkomne multipliceres med $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}$; men herved vil $M=\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$ blive först forandret til $\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha'\beta'\gamma'$, dernæst ved den anförte Multiplication igjen blive til $\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$. Formlerne for A_2, B_2, C_2 erholdes altsaa af de foregaaende for A_1, B_1, C_1 ved blot i A', B', C' at forandre a, b, c, α, β, γ til a', b', c', α', β', γ'.

13. I Tilfældet $p=4$ komme Formlerne (73) til at undergaae en mærkelig Reduction, ligesom ovenfor er viist ved Formlen (70) i det samme Tilfælde eller for $n=2$. Sættes $p=4-2\varepsilon$, hvor ε antages forsvindende, haves

$$\frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}=\frac{2-\frac{p}{2}}{\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}=\varepsilon.$$

Tillige er $\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. Altsaa haves

$$A'=\frac{2}{\alpha^5}\int_0^1\frac{\varepsilon x^{4-2\varepsilon}(1-x^2)^{-1+\varepsilon}\left[1-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}-\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{-1+\varepsilon}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}}.$$

Elementerne af dette Integral ere forsvindende med Undtagelse af dem, som ligge uendelig nær ved den höiere Grændse, saa at man kan sætte $x=1-y$, idet y antages uendelig lille, hvorefter det transformerede Integral bliver at tage fra $y=0$ til $y=k$, som er en vilkaarlig endelig Störrelse. Dette giver

$$A'=\frac{2}{\alpha^5}\cdot\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2}-\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha}{\gamma}\int_0^k\varepsilon(2y)^{-1+\varepsilon}dy=\frac{k^\varepsilon}{\alpha^3\beta\gamma\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2}-\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)},$$

d. e. formedelst $\varepsilon=0$

$$A'=\frac{1}{\alpha^3\beta\gamma\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2}-\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)}.$$

B' og C' findes paa lignende Maade eller udledes af A' ifölge Analogien.

Altsaa haves for Ellipsoidens Tiltrækning efter den Lov $\frac{g}{u^4}$:

1^0. naar det tiltrukne Punkt er indvendigt,

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{gM}{\alpha\beta\gamma\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2}-\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}\right)},\\ A_1=\frac{a}{\alpha^2}P_1,\quad B_1&=\frac{b}{\beta^2}P_1,\quad C_1=\frac{c}{\gamma^2}P_1;\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

2^0. naar det tiltrukne Punkt er udvendigt,

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \frac{gM}{\alpha'\beta'\gamma'\left(1-\frac{a'^2}{\alpha'^2}-\frac{b'^2}{\beta'^2}-\frac{c'^2}{\gamma'^2}\right)}, \\ A_2 &= \frac{a}{\alpha'^2}P_2, \quad B_2=\frac{b}{\beta'^2}P_2, \quad C_2=\frac{c}{\gamma'^2}P_2. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Ligger Punktet paa Overfladen, falde begge Tilfælde sammen, men det sees tillige at P_1 og P_2 blive uendelige, saa at Tiltrækningen bliver uendelig stor. Formlerne (36) for A_1 (a, r) og A_2 (a, r) idet $p=4$ udledes som specielle Tilfælde af (74) og (75) ved at sætte $\alpha=\beta=\gamma=r$ og forandre $a^2+b^2+c^2$ til a^2 eller antage $b=0$, $c=0$.

14. Formlerne (73) kunne tjene til at oplyse, hvorvidt de mærkelige Sætninger, som ere fremstillede af forskjellige Forfattere, senest af *Chasles**), om den Tiltrækning, som en Ellipsoide udöver paa et udvendigt Punkt efter den sædvanlige Attractionslov, omvendt som Qvadratet af Afstanden, kunne udvides til andre Attractionslove. Af den 1ste (73) fölger, ved at antage det tiltrukne Punkt udvendigt og ved at transformere Integralet formedelst Substitutionen $x=\frac{\alpha'}{\alpha}u$,

$$A_2=\frac{g\varrho a}{\alpha^{p-2}}\cdot\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}\beta\gamma}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\frac{u^p\left(1-\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}u^2\right)^{1-\frac{p}{2}}\left[1-\frac{a'^2u^2}{\alpha^2}-\frac{b'^2u^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)u^2}-\frac{c'^2u^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)u^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}du}{\sqrt{[\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)u^2][\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)u^2]}}. \tag{76}$$

For $p=2$ reduceres dette Udtryk til

$$A_2=4\pi g\varrho a.\beta\gamma\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\frac{u^2du}{\sqrt{[\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)u^2][\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)u^2]}}. \tag{77}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, proportionale med α, β, γ, være Halvaxerne i en anden Ellipsoide, med samme Tæthed, concentrisk og homothetisk**) med den förste, og antag $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ bestemte i Analogie med α', β', γ', saa at

---

*) Journ. de l'éc. polyt., 25me cah., pag. 244.

**) Dette Udtryk, indfört af Chasles, betegner „ligedannet og ligedan stillet".

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{\alpha'^2+\beta^2-\alpha^2}+\frac{c^2}{\alpha'^2+\gamma^2-\alpha^2}=1,\\ \frac{a^2}{\alpha_1'^2}+\frac{b^2}{\alpha_1'^2+\beta_1^2-\alpha_1^2}+\frac{c^2}{\alpha_1'^2+\gamma_1^2-\alpha_1^2}=1,\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

eller $\frac{a^2}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{\beta'^2}+\frac{c^2}{\gamma'^2}=1$, $\frac{a^2}{\alpha_1'^2}+\frac{b^2}{\beta_1'^2}+\frac{c^2}{\gamma_1'^2}=1$, som vise at α', β', γ', og de analoge $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$, ere Halvaxer i to Ellipsoider, hvis Overflader gaae igjennem det tiltrukne Punkt, og som ere concentriske med de givne og respective homofocale med samme. Den Tiltrækning, som den anden givne Ellipsoide udöver paa det samme Punkt, være betegnet med F, og den vil være bestemt iffölge (77) ved

$$F=4\pi g\varrho a.\beta_1\gamma_1\int_0^{\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}}\frac{u^2\,du}{\sqrt{[\alpha_1^2+(\beta_1^2-\alpha_1^2)u^2][\alpha_1^2+(\gamma_1^2-\alpha_1^2)u^2]}}.$$

Formedelst Proportionaliteten af α, β, γ med $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ haves dernæst fölgende Udtryk for Tiltrækningen f af den mellem begge Ellipsoideflader indsluttede Ellipsoideskal, idet den anden Flade antages inderst:

$$A_2-F=f=4\pi g\varrho a.\beta_1\gamma_1\int_{\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}}^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\frac{u^2\,du}{\sqrt{[\alpha_1^2+(\beta_1^2-\alpha_1^2)u^2][\alpha_1^2+(\gamma_1^2-\alpha_1^2)u^2]}}.$$

Betegner φ Værdien af f, naar denne Skal antages uendelig tynd, haves

$$\varphi=4\pi g\varrho a.\beta_1\gamma_1\frac{u^2\,du}{\sqrt{[\alpha_1^2+(\beta_1^2-\alpha_1^2)u^2][\alpha_1^2+(\gamma_1^2-\alpha_1^2)u^2]}},$$

idet $u=\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}$, altsaa $\varphi=4\pi g\varrho a.\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta'_1\gamma'_1}d.\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}$, hvor $\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}$ bestemmes ved den 2den Ligning (78), saa at man erholder, som Chasles har viist,

$$\varphi=4\pi g\varrho\frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1}q\cos e.\,d\alpha_1,$$

idet q er Perpendiculæren nedfældt fra Centrum til det Plan, som i det tiltrukne Punkt rörer den derigjennem lagte auxiliære Ellipsoide, homofocal med den givne Ellipsoideskals ydre Grændseflade, e Vinklen mellem denne Perpendiculær og x'nes Axe. Af denne Sætning fölger, at den resulterende Tiltrækning er normal paa denne auxiliære Ellipsoide, ligeledes at den falder sammen med Axen af den Kegle, som har sit Toppunkt i det tiltrukne Punkt og er omskreven om Ellipsoideskallens ydre Grændseflade (Poisson's Theorem). Tillige dannes nu let Formlen for Tiltrækningen af en heterogen Ellipsoide, bestaaende af homothetiske Lag, saaledes at Tætheden kun varierer ved Overgangen fra et Lag til et fölgende. Men det sees tillige let, at disse forskjellige Resultater alene gjælde for Attraction omvendt som Qvadratet af Afstanden, idet Udtrykket for F vil i alle andre Tilfælde afhænge af Halvaxerne $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ikke blot formedelst Integrationsgrændsen men ogsaa derved, at de indgaae under selve Integraltegnet.

§ III. Undersögelse af de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af en flydende Masse, som er i Rotation.

15. En homogen flydende Masse antages roterende om en Axe med en constant angulær Hastighed $=\omega$ og ikke underkastet andre Kræfter end alle Delenes gjensidige Tiltrækninger efter den almindelige Attractionslov $f(u)$. Vælges x'nes Axe som Rotationsaxe, og ere a, b, c Coordinaterne til et vilkaarligt Punkt i Overfladen, efterat den har antaget en permanent Figur, saa haves ifölge Principerne i Hydrostatiken fölgende Betingelsesligning for Ligevægten:

$$A\,da + B\,db + C\,dc - \omega^2(b\,db + c\,dc) = 0, \tag{79}$$

hvor A, B, C ere bestemte ifölge Theorien af Massers Attraction d. e. ved Formlerne (38). Ligningen mellem a, b, c for Fluidets Overflade skal bestemmes saaledes, at den tilfredsstiller Differentialligningen (79) og til samme Tid tjener til at fastsætte Grændserne for de tredobbelte Integraler $A, B, C,$ saa at der er en gjensidig Afhængighed imellem Udtrykkene for $A, B, C,$ som Functioner af $a, b, c,$ og den sögte Ligning mellem

a, b, c. Ifölge (40) og (41) kan Ligning (79) ogsaa skrives saaledes:

$$dT - \omega^2(b\,db + c\,dc) = 0, \tag{80}$$

hvor dT er at forstaae som det totale Differential af T med Hensyn til a, b, c, forsaavidt disse indgaae under Tegnet $\iiint$, men uden Hensyn til Integrationsgrændsernes Afhængighed af a, b, c.

16. For $f(u) = gu$ haves A, B, C bestemte ved (60), saa at (79) reduceres til

$$(a - x_1)da + (b - y_1)db + (c - z_1)dc - \frac{\omega^2}{gM}(bdb + cdc) = 0. \tag{81}$$

Denne Ligning kan ikke almindeligen integreres; thi x_1, y_1, z_1 afhænge af selve den primitive Ligning mellem a, b, c, efterdi en Forandring af Overfladens Figur almindeligen lader Tyngdepunktet forflyttes. Derimod vil Ligning (81) blive particulært tilfredsstillet ved at sætte $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, hvorefter man ved Integration erholder

$$a^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{gM}\right)(b^2 + c^2) = \alpha^2. \tag{82}$$

For $\omega^2 < gM$ tilhörer denne Ligning den fladtrykte Revolutions-Ellipsoide, idet Centrum er Begyndelsespunkt og Revolutionsaxen falder sammen med x'nes Axe, altsaa med Rotationsaxen; men det er herved en nödvendig Betingelse at $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ d. e. at Ellipsoiden har sit Tyngdepunkt i Centrum, hvilket f. Ex. finder Sted, naar Massen bestaaer af homogene concentriske og homothetiske Niveaulag af forskjellige Tætheder. Disse ellipsoidiske Lag ere bestemte ved Ligning (82), idet α varierer continuerligen ligefra $\alpha = 0$ til den Værdie, som tilhörer den frie Overflade. Denne sidste Værdie er bestemt ved

$$M = \frac{4\pi}{1 - \frac{\omega^2}{gM}} \int_0^\alpha \varrho\, \alpha^2 d\alpha$$

eller

$$\frac{1}{4\pi}\left[M-\frac{\omega^2}{g}\right]=\int_0^{\alpha}\varrho\,\alpha^2\,d\alpha, \tag{83}$$

hvor ϱ er en given Function af α. Naar $\omega^2=gM$, vil den frie Overflade være dannet af to parallele Planer, og naar $\omega^2>gM$, vil den frie Overflade være en Revolutions-Hyperboloide; men man kan ikke med *Poisson**) heraf slutte, at Ligevægten med en fuldkommen fri Overflade er umulig for $\omega^2 \overline{\gtrless} gM$, thi det maa erindres, at Ligning (82) kun fremstiller en particulær Maade, hvorpaa Ligning (81) kan tilfredsstilles.

17. Naar $f(u)=\frac{g}{u^2}$, haves ifölge (59) disse Formler for Ellipsoidens Tiltrækning, idet Halvaxerne betegnes α, β, γ:

$$A=gMA'a,\quad B=gMB'b,\quad C=gMC'c, \tag{84}$$

hvor A', B', C' ere saaledes bestemte:

$$\left.\begin{aligned}
A'&=\frac{\frac{3}{2}}{\alpha^3\beta\gamma}\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},\\
B'&=\frac{\frac{3}{2}}{\alpha\beta^3\gamma}\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},\\
C'&=\frac{\frac{3}{2}}{\alpha\beta\gamma^3}\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)^3}}.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Disse Störrelser ere uafhængige af a, b, c og alene afhængige af α, β, γ, hvorved Ligning (79) netop bliver af samme Form som Ellipsoidens Differentialligning:

$$\frac{a\,da}{\alpha^2}+\frac{b\,db}{\beta^2}+\frac{c\,dc}{\gamma^2}=0. \tag{86}$$

Ved altsaa at sammenligne med hinanden Coefficienterne for $a\,da$, $b\,db$, $c\,dc$ i Ligningerne (79) og (86), og ved hermed at combinere Formlen

*) Traité de mécanique, Tom. II, pag. 552.

$M = \frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$, haves Ligningerne til at bestemme Halvaxerne α, β, γ, altsaa til at bestemme de forskjellige ellipsoidiske Ligevægtsfigurer, som svare til en given Rotationshastighed ω, og til en given Masse M, idet Fluidet antages homogent og alle Delene gjensidigen tiltrække hinanden efter den sædvanlige Attraction, omvendt som Qvadratet af Afstanden. Disse Ligevægtsfigurer skulle nedenfor undersöges. — Ogsaa for den sammensatte Attractionslov

$$f(u) = \frac{g}{u^2} + Gu \tag{87}$$

ere ellipsoidiske Ligevægtsfigurer mulige. Man erholder nemlig

$$A = M(gA' + G)a, \quad B = M(gB' + G)b, \quad C = M(gC' + G)c,$$

hvorved atter Ligning (79) bliver af Formen (86), og man har til Bestemmelse af α, β, γ:

$$\left.\begin{aligned} (gA' + G)\alpha^2 = \left(gB' + G - \frac{\omega^2}{M}\right)\beta^2 = \left(gC' + G - \frac{\omega^2}{M}\right)\gamma^2, \\ M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

18. For Attractionsloven $f(u) = \frac{g}{u^p}$ haves A, B, C bestemte ved Formlerne (72) og (73), hvorefter man ved Sammenligning af (79) og (86) erholder Betingelses-Ligningerne for ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af den homogene flydende Masse M, underkastet alle Delenes gjensidige Tiltrækninger efter den angivne Lov og roterende om x'nes Axe med den constante angulære Hastighed ω, nemlig

$$A'\alpha^2 = \left(B' - \frac{\omega^2}{gM}\right)\beta^2 = \left(C' - \frac{\omega^2}{gM}\right)\gamma^2. \tag{89}$$

Heraf fölger

$$\frac{\omega^2}{gM} = B' - \frac{\alpha^2}{\beta^2}A' = C' - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}A' \tag{90}$$

d. e. ved Substitution af Udtrykkene (73) for A', B', C' og ved Reduction formedelst $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\omega^2}{gM}\alpha^{1+p}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}\\
&=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\int_0^1\frac{x^p(1-x^2)^{3-p}\left[1-\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\cdot\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}}\\
&=\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\int_0^1\frac{x^p(1-x^2)^{3-p}\left[1-\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{b^2x^2}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2}-\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\cdot\frac{c^2x^2}{\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3}}.
\end{aligned}\right\}\quad(91)$$

For at disse Ligninger i Forbindelse med $M=\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha\beta\gamma$ skulle kunne tjene til at bestemme α, β, γ og derved de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer, vil det være nödvendigt, at begge Integralerne, som disse Ligninger indeholde, ere uafhængige af b og c. Heri bestaaer altsaa overhoved Betingelsen for disse Ligevægtsfigurers Mulighed. Denne Betingelse er opfyldt i de to ovennævnte Tilfælde (Art. 16 og 17): 1^0. for $p=-1$, idet man dividerer med $\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$, som bringes ind under Integraltegnene, hvorefter Integralerne behandles som forhen er viist ved Formlen (70), nemlig ved at sætte $p=-1+2\varepsilon$, idet ε antages forsvindende, saa at man har, idet k betegner en vilkaarlig endelig Störrelse og idet

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)=\Gamma(\varepsilon)=\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{gM}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\int_0^k\varepsilon x^{-1+2\varepsilon}dx=\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\int_0^k\varepsilon x^{-1+2\varepsilon}dx,$$

altsaa $\beta=\gamma$ og $\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{gM}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{k^{2\varepsilon}}{2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta^2}$, fölgelig

$$1-\frac{\omega^2}{gM}=\frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

det samme som haves ifölge (82). 2^0. For $p=2$ er Betingelsen opfyldt, idet (91) reduceres til

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}\frac{\omega^2}{gM}\alpha^3 &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}}\\ &= \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3}}.\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Disse to Tilfælde tilligemed det deraf sammensatte, fremstillet ved Formlerne (87) og (88), ere de eneste hvor ellipsoidiske Ligevægtsfigurer ere mulige, thi Integralerne (91) blive i alle andre Tilfælde nödvendigen afhængige af b og c. Dette Resultat gjælder almindeligt, omendskjöndt man har tillagt Functionen $f(u)$ den particulære Form $\frac{g}{u^p}$; thi enhver anden Form reduceres til denne, idet man udvikler $f(u)$ i Række efter Potentser af u og derefter beregner Composanterne A, B, C for hvert Led særskilt. Specielt kan bemærkes, at af alle de Love for Tiltrækninger, ved hvilke Kraften aftager, naar Afstanden voxer, er den Lov, som Naturen fölger (omvendt som Qvadratet af Afstanden), den eneste, som gjör ellipsoidiske Ligevægtsfigurer mulige. Disse Figurer, bestemte ved (92), er det, som nu skulle undersöges.

19. Af (92) fölger at $\alpha<\beta$ og $\alpha<\gamma$, efterdi Störrelsen $\frac{1}{3}\frac{\omega^2}{gM}\alpha^3$ saavelsom begge de bestemte Integraler ere positive. Rotationen vil altsaa stedse skee om den mindste af de tre Axer i Ellipsoiden. Betegnes nu ved e og e' Excentriciteterne af de to elliptiske Hovedsnit i Planerne xy og xz, haves

$$e^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}, \quad e'^2 = \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}. \quad (93)$$

Tillige være

$$\lambda^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}, \quad \lambda'^2 = \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}. \quad (94)$$

Excentricitets-Vinklerne være betegnede ved θ og θ', saa at man har

$$e = \sin\theta,\ \lambda = \operatorname{tg}\theta,\quad e' = \sin\theta',\ \lambda' = \operatorname{tg}\theta', \tag{95}$$

samt

$$\alpha = \beta\cos\theta = \gamma\cos\theta'. \tag{96}$$

Betegnes Ellipsoidens Volumen ved V, haves

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma = \tfrac{4}{3}\pi\frac{\alpha^3}{\cos\theta\cos\theta'},$$

altsaa

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{V\cos\theta\cos\theta'}{\frac{4}{3}\pi}},\ \beta = \sqrt[3]{\frac{V\cos\theta'}{\frac{4}{3}\pi\cos^2\theta}},\ \gamma = \sqrt[3]{\frac{V\cos\theta}{\frac{4}{3}\pi\cos^2\theta'}}. \tag{97}$$

Som de givne Störrelser maa man betragte g, ω, V, ϱ, hvorved ogsaa haves $M = V\varrho$. Heraf skulle α, β og γ söges. Det kommer altsaa blot an paa at finde de to Vinkler θ og θ' eller deres Tangenter λ og λ'. Ifölge (92) haves

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)}} - \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)\left(1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2\right)^3}} = 0$$

eller, ved at trække begge Leddene sammen under eet Integraltegn og ved at indföre Störrelserne λ og λ' ifölge (94),

$$(\lambda^2-\lambda'^2)\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)^3(1+\lambda'^2x^2)^3}} = 0. \tag{98}$$

Hermed combineres ifölge (92)

$$\frac{\omega^2}{4\pi g\varrho} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\cos\theta'}\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)^3(1+\lambda'^2x^2)}} \tag{99}$$

eller

$$\frac{\omega^2}{4\pi g\varrho} = \frac{\sin^2\theta'}{\cos\theta\,\cos\theta'}\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)(1+\lambda'^2x^2)^3}}. \tag{100}$$

Disse Ligninger (99) og (100) ere eensgjældende, forsaavidt den foregaaende Relation (98) mellem λ og λ' er tilfredsstillet. Desuden haves ifölge (89)

$$\frac{\omega^2}{gM} = \frac{\beta^2B'-\gamma^2C'}{\beta^2-\gamma^2}$$

d. e., naar B' og C' bestemmes ifölge (73),

$$\frac{\omega^2}{4\pi g\varrho} = \frac{1}{\cos\theta\cos\theta'} \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)\,dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)^3(1+\lambda'^2x^2)^3}}, \tag{101}$$

som ogsaa udkommer, naar (98), efterat Siderne ere ombyttede, multipliceres med $\frac{\cos\theta}{(\lambda^2-\lambda'^2)\cos\theta'}$ eller $\frac{\cos\theta'}{(\lambda^2-\lambda'^2)\cos\theta}$ og derefter adderes til (99) eller (100). Af (98) combineret med en hvilkensomhelst af de tre eensgjældende (99), (100), (101) maae θ og θ' udledes, som alene afhænge af g, ω og ϱ, nemlig af $\frac{\omega^2}{g\varrho}$, hvorefter Formlerne (97) give Halvaxerne α, β, γ, som tillige afhænge af Volumen V. Kun maa bemærkes, at naar man tager $\lambda=\lambda'$, hvorved (98) tilfredsstilles, er Formlen (101) ugyldig, medmindre i specielt Tilfælde ogsaa den anden Factor i (98), det bestemte Integral, forsvinder.

20. Af Ligning (98) udledes en dobbelt Oplösning af Problemet formedelst de to Factorer, hvoraf venstre Side er sammensat. Den förste Oplösning er

$$\lambda=\lambda', \tag{102}$$

som giver $\theta=\theta'$, $\beta=\gamma$, hvortil svarer en Revolutions-Ellipsoide (*Maclaurins* Theorem), idet θ bestemmes ifölge (99) eller (100), som for $\theta=\theta'$ redures til

$$\frac{\omega^2}{4\pi g\varrho} = \lambda^2 \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)\,dx}{(1+\lambda^2x^2)^2}. \tag{103}$$

Ved Integration findes

$$\int \frac{x^2(1-x^2)\,dx}{(1+\lambda^2x^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^4}\left[\frac{3+\lambda^2}{\lambda}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\lambda x) - \left(\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2x^2}+2\right)x\right].$$

Altsaa, ved at sætte

$$\frac{\omega^2}{2\pi g\varrho} = u, \tag{104}$$

erholdes

$$u = \frac{(3+\lambda^2)\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = \lambda) - 3\lambda}{\lambda^3} \tag{105}$$

eller *)

$$\frac{3\lambda + u\lambda^3}{3+\lambda^2} - \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = \lambda) = 0. \tag{106}$$

Man kan ikke oplöse denne Ligning under endelig Form med Hensyn til λ, men den approximative Oplösning lettes i forekommende Tilfælde ved den efterfölgende Tabel, som fremstiller for de successive Værdier af θ i hele Grader fra 0 til 90° de tilsvarende Værdier af Excentriciteten $e = \sin\theta$ og af u bestemt ved (105). For de smaa Værdier af θ haves som en meget convergent Rækkeudvikling:

$$u = \frac{4}{3.5}\lambda^2 - \frac{8}{5.7}\lambda^4 + \frac{12}{7.9}\lambda^6 \ldots. (-1)^{n+1}\frac{4n}{(2n+1)(2n+3)}\lambda^{2n} + \ldots \tag{107}$$

og for Værdier af θ i Nærheden af 90°, hvortil svare meget store Værdier af λ:

$$u = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{\lambda} - \frac{4}{1}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{2}\pi\frac{1}{\lambda^3} - \frac{8}{3}\frac{1}{\lambda^4} + \frac{12}{3.5}\frac{1}{\lambda^6} \ldots (-1)^{n+1}\frac{4n}{(2n-3)(2n-1)}\frac{1}{\lambda^{2n}} + \ldots \tag{108}$$

---

*) Jvf. Traité de mécanique céleste, T. II, pag. 52, hvor q er den samme som hos os $\frac{3}{2}u$.

Tabel over de sammenhörende Værdier af θ, e og u.

θ	e	u	diff.	θ	e	u	diff.	θ	e	u	diff.
0°	0,00000	0,00000		30°	0,50000	0,06900	0,00426	60°	0,86603	0,20920	0,00342
1	0,01745	0,00008	0,00008	31	0,51504	0,07335	0,00435	61	0,87462	0,21235	0,00315
2	0,03490	0,00032	0,00024	32	0,52992	0,07780	0,00445	62	0,88295	0,21521	0,00286
3	0,05234	0,00073	0,00041	33	0,54464	0,08235	0,00455	63	0,89101	0,21776	0,00255
4	0,06976	0,00130	0,00057	34	0,55919	0,08697	0,00462	64	0,89879	0,21995	0,00219
5	0,08716	0,00203	0,00073	35	0,57358	0,09168	0,00471	65	0,90631	0,22177	0,00182
6	0,10453	0,00292	0,00089	36	0,58779	0,09646	0,00478	66	0,91355	0,22318	0,00141
7	0,12187	0,00397	0,00105	37	0,60182	0,10131	0,00485	67	0,92050	0,22414	0,00096
8	0,13917	0,00518	0,00121	38	0,61566	0,10622	0,00491	68	0,92718	0,22462	0,00048
9	0,15643	0,00655	0,00137	39	0,62932	0,11118	0,00496	69	0,93358	0,22458	—0,00004
10	0,17365	0,00808	0,00153	40	0,64279	0,11619	0,00501	70	0,93969	0,22397	—0,00061
11	0,19081	0,00976	0,00168	41	0,65606	0,12123	0,00504	71	0,94552	0,22277	—0,00120
12	0,20791	0,01160	0,00184	42	0,66913	0,12630	0,00507	72	0,95106	0,22091	—0,00186
13	0,22495	0,01359	0,00199	43	0,68200	0,13139	0,00509	73	0,95630	0,21834	—0,00257
14	0,24192	0,01574	0,00215	44	0,69466	0,13649	0,00510	74	0,96126	0,21503	—0,00331
15	0,25882	0,01803	0,00229	45	0,70711	0,14159	0,00510	75	0,96593	0,21090	—0,00413
16	0,27564	0,02048	0,00245	46	0,71934	0,14668	0,00509	76	0,97030	0,20591	—0,00499
17	0,29237	0,02307	0,00259	47	0,73135	0,15175	0,00507	77	0,97437	0,19998	—0,00593
18	0,30902	0,02581	0,00274	48	0,74314	0,15678	0,00503	78	0,97815	0,19305	—0,00693
19	0,32557	0,02870	0,00289	49	0,75471	0,16177	0,00499	79	0,98163	0,18504	—0,00801
20	0,34202	0,03172	0,00302	50	0,76604	0,16670	0,00493	80	0,98481	0,17589	—0,00915
21	0,35837	0,03487	0,00315	51	0,77715	0,17155	0,00485	81	0,98769	0,16551	—0,01038
22	0,37461	0,03817	0,00330	52	0,78801	0,17632	0,00477	82	0,99027	0,15380	—0,01171
23	0,39073	0,04159	0,00342	53	0,79864	0,18098	0,00466	83	0,99255	0,14069	—0,01311
24	0,40674	0,04515	0,00356	54	0,80902	0,18552	0,00454	84	0,99452	0,12606	—0,01463
25	0,42262	0,04883	0,00368	55	0,81915	0,18993	0,00441	85	0,99619	0,10981	—0,01625
26	0,43837	0,05264	0,00381	56	0,82904	0,19418	0,00425	86	0,99756	0,09183	—0,01798
27	0,45399	0,05656	0,00392	57	0,83867	0,19825	0,00407	87	0,99863	0,07199	—0,01984
28	0,46947	0,06060	0,00404	58	0,84805	0,20212	0,00387	88	0,99939	0,05017	—0,02182
29	0,48481	0,06474	0,00414	59	0,85717	0,20578	0,00366	89	0,99985	0,02622	—0,02395
								90	1,00000	0,00000	— 0,02622

21. Störrelsen u kan ifölge Udtrykket (**103**) alene være **0** for selve Grændserne $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, hvortil svare $\theta=0$, $\theta=90°$, men maa iövrigt forblive bestandigen positiv. Dette sees ogsaa af den foregaaende Tavle, hvor tillige et enkelt Maximum bemærkes, nemlig $u=0{,}22462$ svarende til $\theta=68°$. For at godtgjöre, at der i Virkeligheden kun existerer dette ene Maximum og intet Minimum, kunde $\frac{du}{d\lambda}$ undersöges, men formedelst denne Functions complicerte Form, ved Blanding af algebraiske og transcendente Led, har man fundet det lettere*) at anvende Formlen (**106**), ved nemlig at sætte

$$\varphi = \frac{3\lambda + u\lambda^3}{3+\lambda^2} - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \lambda) \tag{109}$$

og söge Værdierne af λ, som gjöre $\varphi=0$, eller söge Skjæringspunkterne af Abscisseaxen og den plane Curve bestemt ved Ligning (**109**) mellem de retvinklede Coordinater, Abscissen λ og Ordinaten φ. Rækkeudviklingerne for φ, som convergere den ene for de smaa, den anden for de store Værdier af λ, ere

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{u}{3}\lambda^3 - \left[\frac{1}{5} - \frac{1-u}{9}\right]\lambda^5 + \left[\frac{1}{7} - \frac{1-u}{27}\right]\lambda^7 \ldots (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1-u}{3^n}\right]\lambda^{2n+1} + \ldots,\\
\varphi &= u\lambda - \frac{1}{2}\pi + [1+3(1-u)]\frac{1}{\lambda} - \left[\frac{1}{3} + 3^2(1-u)\right]\frac{1}{\lambda^3} \ldots (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2n-1} + 3^n(1-u)\right]\frac{1}{\lambda^{2n-1}} + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

$\lambda=0$, som giver $\varphi=0$, er en fremmed Rod undtagen for $u=0$, saa at det kun kommer an paa at söge de positive Rödder >0. Ved begge de yderste Grændser $\lambda=0$ og $\lambda=\infty$ er φ positiv, idet λ uendelig lille giver ifölge den förste Række (**110**) $\varphi=\frac{u}{3}\lambda^3$, og λ uendelig stor giver ifölge den anden Række $\varphi=u\lambda$. Man har

*) Traité de mécanique céleste, T. II, pag. 55; *Pontécoulant*, Théorie analytique du système du monde, T. II, pag. 397; *C. O. Meyer*, De æquilibrii formis ellipsoidicis (Crelles Journal, 24de Bd. Pag. 50).

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{\lambda^2[u\lambda^4+(10u-4)\lambda^2+9u]}{(3+\lambda^2)^2(1+\lambda^2)},$$

som ligeledes begynder og ender med at være positiv, og som alene bliver 0 for $\lambda=p$ bestemt ved

$$up^4+(10u-4)p^2+9u=0. \tag{111}$$

Denne Ligning kan i det höieste have to positive reelle Rödder p_1 og p_2, bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} p_1^2&=\frac{2}{u}-5-\sqrt{\left(\frac{2}{u}-5\right)^2-9},\\ p_2^2&=\frac{2}{u}-5+\sqrt{\left(\frac{2}{u}-5\right)^2-9},\end{aligned}\right\}$$

hvilket forsætter $u<\frac{1}{4}$. Man vil da have

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{u\lambda^2(\lambda^2-p_1^2)(\lambda^2-p_2^2)}{(3+\lambda^2)^2(1+\lambda^2)},$$

saa at φ er positiv og voxende i Intervallet fra $\lambda=0$ til $\lambda=p_1$, dernæst aftagende i Intervallet fra $\lambda=p_1$ til $\lambda=p_2$, endeligen bestandigt voxende fra $\lambda=p_2$ til $\lambda=\infty$. Ligningen $\varphi=0$ vil altsaa i det höieste have to positive reelle Rödder, den ene beliggende mellem p_1 og p_2, den anden mellem p_2 og ∞, hvilke Rödder nödvendigen maae existere, hvis Værdien af φ for $\lambda=p_2$ er negativ. Derimod existerer ingen Rod, hvis denne Værdie er positiv, og som Overgangstilfælde kan selve $\lambda=p_2$ gjöre $\varphi=0$ d. e. begge Rödder falde sammen til een, idet Curven er rörende til Abscisseaxen. Dette sidste Tilfælde finder Sted, naar u falder sammen med sit Maximum, saa at den til dette Maximum svarende Værdie $\lambda=p$ er bestemt ved den Ligning i p, som haves ved i $\varphi=0$ at sætte $\lambda=p$ og for u dens Udtryk ved p ifölge (111), nemlig

$$P=\frac{p(9+7p^2)}{(9+p^2)(1+p^2)}-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=p)=0. \tag{112}$$

Denne Ligning, som ogsaa erholdes ligefrem ved at sætte $\frac{du}{d\lambda}$, udledt af (105), $=0$, nemlig

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{\lambda(9+7\lambda^2)-(9+\lambda^2)(1+\lambda^2)\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg}=\lambda)}{\lambda^4(1+\lambda^2)} = 0,$$

har kun en enkelt positiv Rod >0. Man har nemlig

$$\frac{dP}{dp} = \frac{8p^4(3-p^2)}{(9+p^2)^2(1+p^2)^2},$$

som er positiv fra $p=0$ til $p=\sqrt{3}$, derefter bestandigen negativ fra $p=\sqrt{3}$ til $p=\infty$; og ved Udvikling af P i Række findes, at p uendelig lille giver $P=\frac{8}{135}p^5$, som er positiv, hvorimod $p=\infty$ giver $P=-\frac{\pi}{2}$, som er negativ. Heraf sluttes, at Ligning (112) har en enkelt positiv Rod $p>\sqrt{3}$. Altsaa maa det enkelte Maximum af u svare til en Værdie af $\theta>60°$. Den approximerte Oplösning af Ligning (112) giver*)

$$p=2{,}5293,$$

hvortil svare $\theta=68°25'40''$ og $u=0{,}22467$; men med en Nöiagtighed af hele Secunder vil den til Maximum af u svarende Værdie af θ være $68°25'39''$, idet man har

θ	e	λ	u
68°25′38″	0,929951	2,529222	0,2246656
68°25′39″	0,929953	2,529258	0,2246657
68°25′40″	0,929955	2,529294	0,2246656

Meyer angiver unöiagtigt Maximum af u med fire Decimaler: 0,2246 istedetfor 0,2247. Derimod har Laplace nöiagtigere angivet Maximum af q eller $\frac{3}{2}u$ med 0,337007 og Pontécoulant med 0,33701. — Resultatet af Undersögelsen kan nu angives saaledes. Naar u overstiger det angivne Maximum, vil ingen Revolutions-Ellipsoide kunne vedligeholde sig som Ligevægtsfigur; er u liig dette Maximum, er netop en enkelt Revolutions-Ellipsoide mulig, med den ovenfor angivne Excentricitet;

*) Laplace og efter ham Pontécoulant angive $p=2{,}5292$, men Meyer har $p=2{,}5293$, som er det rigtige, thi til

	$p=2{,}5292$,	$p=2{,}5293$,	$p=2{,}5294$,
svare:	$P=0{,}000011$,	$P=0{,}000002$,	$P=-0{,}000008$.

falder endeligen u under det samme Maximum, ere stedse to forskjellige Revolutions-Ellipsoider mulige, af hvilke den ene, naar u nærmer sig til 0, stedse mere nærmer sig til Kuglen ($\theta=0$), medens den anden med stærkt voxende Excentricitet kommer til at henhöre til de skiveformige Sphæroider, som ende med Planet selv ($\theta=90°$), hvilken Figur, analytisk taget, er ligesaa vel som Kuglen en Ligevægtsfigur, naar Massen ikke roterer.

22. Den anden Oplösning, som udledes af (98), giver en Ellipsoide med ulige Axer (*Jacobis* Theorem), idet λ og λ', svarende til Excentriciteterne af begge de elliptiske Hovedsnit i Planerne xy og xz, bestemmes ifölge (98) og (101) ved Systemet af de to Formler:

$$\left.\begin{aligned} H &= \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)^3(1+\lambda'^2x^2)^3}} = 0, \\ u &= 2\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)}\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)dx}{\sqrt{(1+\lambda^2x^2)^3(1+\lambda'^2x^2)^3}}. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Sættes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\beta^2} &= \cos^2\theta = \sigma, & \frac{\alpha^2}{\gamma^2} &= \cos^2\theta' = \tau, \\ \lambda^2 &= \frac{1-\sigma}{\sigma}, & \lambda'^2 &= \frac{1-\tau}{\tau}, \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

og transformeres begge Integralerne (113) ved Substitutionen $x=(1+y)^{-\frac{1}{2}}$, idet tillige sættes

$$H = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma\tau}\,F, \quad (115)$$

saa erholdes som eensgjældende med Systemet (113):

$$\left.\begin{aligned} F &= (1-\sigma-\tau)\int_0^\infty \frac{y\,dy}{R^3} - \sigma\tau\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{R^3} = 0, \\ u &= \sigma\tau\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R}, \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

hvor for Korthedss Skyld

$$R = \sqrt{(1+y)(1+\sigma y)(1+\tau y)}. \quad (117)$$

Formlerne (116) kunne aabenbart ogsaa skrives saaledes:

$$\left.\begin{aligned} F=(1-\sigma)(1-\tau)\int_0^\infty\frac{y\,dy}{R^3}-\sigma\tau\int_0^\infty\frac{y\,dy}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R}=0,\\ u=(1-\sigma)(1-\tau)\int_0^\infty\frac{y\,dy}{R^3},\end{aligned}\right\}\qquad(118)$$

og ved Transformation af Formlerne (99) og (100) haves tillige fölgende Udtryk for u:

$$u=\sigma(1-\sigma)\int_0^\infty\frac{(1+\tau y)\,y dy}{R^3}=\tau(1-\tau)\int_0^\infty\frac{(1+\sigma y)ydy}{R^3}.\qquad(119)$$

Discussionen af Ligningerne (116) fremsætte vi nu efter Meyer korteligen saaledes*). Ved Differentiation findes

$$\frac{dF}{d\sigma}=-A_0-A_1\tau,\quad \frac{dF}{d\tau}=-A_0-A_1\sigma,\qquad(120)$$

idet

$$2A_0=\int_0^\infty\frac{y(1+y)}{R^5}[2+(3-\sigma-\tau)y-\sigma\tau y^2]\,dy,\qquad(121)$$

$$2A_1=\int_0^\infty\frac{y^2(1+y)}{R^5}[2+(3-\sigma-\tau)y-\sigma\tau y^2]\,dy.\qquad(122)$$

Man har

$$d.\frac{y^2}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R}=\frac{2y+\frac{1}{2}(3+\sigma+\tau)y^2-\sigma\tau y^3-\frac{3}{2}\sigma\tau y^4}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R^3}dy,$$

altsaa ved Integration fra 0 til ∞

$$0=\int_0^\infty\frac{y(1+y)}{R^5}[2+\tfrac{1}{2}(3+\sigma+\tau)y-\sigma\tau y^2-\tfrac{3}{2}\sigma\tau y^3]dy.\qquad(123)$$

Denne Ligning trukket fra (121) giver

$$2A_0=\tfrac{3}{2}\int_0^\infty\frac{y^2(1+y)}{R^5}[1-\sigma-\tau+\sigma\tau y^2]\,dy.\qquad(124)$$

---

*) Den foran citerede Afhandling. Hermed kan sammenholdes „Mémoire sur les figures ellipsoidales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation", par *Liouville* (Conn. des temps, 1846).

Af (122) og (124) fölger

$$2A_0+3A_1=\tfrac{3}{2}(3-\sigma-\tau)\int_0^\infty \frac{y^2(1+y)^2}{R^5}dy. \qquad (125)$$

Skrives nu Formlerne (120) paa fölgende Maade

$$\frac{dF}{d\sigma}=-A_0(1-\tfrac{2}{3}\tau)-\tfrac{1}{3}(2A_0+3A_1)\tau,$$

$$\frac{dF}{d\tau}=-A_0(1-\tfrac{2}{3}\sigma)-\tfrac{1}{3}(2A_0+3A_1)\sigma,$$

saa vil det kunne sees, at begge disse Störrelser ere negative; thi den förste (116) viser, at $1-\sigma-\tau$ aldrig bliver negativ, saa at Udtrykkene (124) og (125) maae være positive. F er fölgelig en aftagende Function baade af σ og af τ. Endvidere haves

$$du=\frac{du}{d\sigma}d\sigma+\frac{du}{d\tau}d\tau, \quad \frac{dF}{d\sigma}d\sigma+\frac{dF}{d\tau}d\tau=0,$$

altsaa, ved Elimination af $d\tau$,

$$du=\frac{\frac{dF}{d\tau}\frac{du}{d\sigma}-\frac{dF}{d\sigma}\frac{du}{d\tau}}{\frac{dF}{d\tau}}d\sigma, \qquad (126)$$

og ifölge den anden (116) er

$$\frac{du}{d\sigma}=B_0\tau+B_1(\tau-\tfrac{1}{2}\sigma)\tau, \quad \frac{du}{d\tau}=B_0\sigma+B_1(\sigma-\tfrac{1}{2}\tau)\sigma, \qquad (127)$$

idet

$$2B_0=\int_0^\infty \frac{y(1+y)^2}{R^5}(2-\sigma\tau y^2)\,dy, \quad B_1=\int_0^\infty \frac{y^2(1+y)^2}{R^5}dy. \qquad (128)$$

Ligning (123) trukket fra den förste (128) giver

$$2B_0=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y^2(1+y)}{R^5}(1-\sigma-\tau+\sigma\tau y^2)\,dy, \qquad (129)$$

saa at B_0 saavelsom B_1 er positiv. Af (120) og (127) fölger

$$\frac{dF}{d\tau}\frac{du}{d\sigma}-\frac{dF}{d\sigma}\frac{du}{d\tau}=(\sigma-\tau)\left[A_0B_0+(\sigma+\tau)A_0B_1+\tfrac{3}{2}\sigma\tau A_1B_1\right]$$

$$=(\sigma-\tau)\left[A_0B_0+\tfrac{1}{2}\sigma\tau(2A_0+3A_1)B_1+[1-(1-\sigma)(1-\tau)]A_0B_1\right],$$

som er positivt, forsaavidt man vedtager $\sigma > \tau$ eller $\theta < \theta'$ d. e. at af de to elliptiske Hovedsnit i Planerne xy og xz det förste er det, som har mindst Excentricitet. Formlen (126) udviser fölgelig, at du og $d\sigma$ have modsat Fortegn, altsaa at u er en aftagende Function af σ, idet denne Störrelse betragtes som indgaaende i u ikke blot explicite, men ogsaa implicite derved at τ er en Function af σ. Denne sidste Function er ligeledes aftagende, hvilket Formlen

$$d\tau = -\frac{\frac{dF}{d\sigma}}{\frac{dF}{d\tau}} d\sigma$$

udviser, og som ogsaa er indlysende derved, at naar Ligningen $F=0$ er tilfredsstillet ved en vis Værdie af σ og tilsvarende af τ, saa hvis disse Störrelser enten samtidigen voxede eller samtidigen aftoge, vilde F i förste Tilfælde aftage, i andet voxe, og saaledes Ligningen $F=0$ ophöre at være tilfredsstillet. — Til en given Værdie af σ svarer stedse en Værdie af τ; thi for $\tau=1$ er F negativ, hvorimod $\tau=0$ gjör F positiv, idet $\sigma\tau\int_0^\infty \frac{y^2dy}{R^3}$ forsvinder tilligemed τ, efterdi

$$(1+y)^{\frac{3}{2}}(1+\tau y)^{\frac{3}{2}} = (1+y)^{\frac{3}{2}}(1+\tau y)^{\frac{1}{2}}(1+\tau y) > y^{\frac{3}{2}}(\tau y)^{\frac{1}{2}} = y^2\sqrt{\tau},$$

fölgelig $\frac{y^2}{R^3} < \frac{1}{\sqrt{\tau}(1+\sigma y)^{\frac{3}{2}}}$, saa at

$$\sigma\tau\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{R^3} < \sigma\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+\sigma y)^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\tau}.$$

Da F bestandigen aftager naa τ voxer, voxer naar τ aftager, indsees tillige, at kun en enkelt Værdie af τ kan svare til en opgiven Værdie af σ. Til enhver Værdie af u kan der heller ikke svare mere end eet System af sammenhörende Værdier af σ og τ, efterdi Functionen u bestandigen aftager naar σ voxer, og voxer naar σ aftager, idet til samme Tid τ varierer som Function af σ, bevægende sig, som man veed, i modsat Retning af denne. Medens ethvert System af Værdier af σ og τ gjör u mulig, eftersom den er almindeligen bestemt under explicit reel Form, saa vilde derimod σ og τ blive umulige, hvis u skulde falde udenfor dens to yderste Grændser, hvilke saaledes bestemmes. Dens Minimum er $u=0$, svarende til de yderste Værdier af σ og τ, som ere (ifölge Antagelsen af $\sigma>\tau$) $\sigma=1$, $\tau=0$ d. e. $\theta=0$, $\theta'=90°$. Man har nemlig

$$(1+\sigma y)(1+\tau y)R>(1+\sigma y)^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}(\tau y)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\tau}(1+\sigma y)^{\frac{3}{2}}y,$$

fölgelig

$$u=\sigma\tau\int_0^\infty\frac{ydy}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R}<\sigma\sqrt{\tau}\int_0^\infty\frac{dy}{(1+\sigma y)^{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{\tau},$$

som forsvinder tilligemed τ. Ellipsoiden er herved reduceret til en uendelig tynd Cylinder eller en ret Linie, der paa lignende Maade som Planet er en Ligevægtsfigur naar Massen ikke roterer. Idet dernæst σ aftager fra 1, τ voxer fra 0, d. e. θ voxer fra 0, θ' aftager fra $90°$, vil u stadigen voxe, indtil den naaer sit Maximum, som opnaaes saasnart σ og τ eller θ og θ' mödes, hvilket maa finde Sted i den anden Halvdeel af Qvadranten, efterdi $\sigma+\tau<1$ d. e. $\theta+\theta'>90°$ (undtagen netop $\sigma+\tau=1$, $\theta+\theta'=90°$ for $\sigma=1$, $\tau=0$). Den fælleds Grændseværdie $\theta=\theta'$ for begge Excentricitets-Vinklerne bestemmes ved i den förste Ligning (115) at sætte $\lambda=\lambda'$, hvilket giver

$$\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^4x^2)dx}{(1+\lambda^2x^2)^3}=0,$$

altsaa, naar Integrationen udföres,

$$L=\frac{3\lambda+13\lambda^3}{3+14\lambda^2+3\lambda^4}-\text{arc}(\text{tg}=\lambda)=0. \tag{130}$$

Hertil svarer ifölge (101) som det sögte Maximum af u, hvad vi ville betegne ved U,

$$U=2(1+\lambda^2)\int_0^1\frac{x^2(1-x^2)dx}{(1+\lambda^2x^2)^3},$$

eller, ved at udföre Integrationen,

$$U = \frac{3\lambda + \lambda^3 - (3-\lambda^2)(1+\lambda^2)\,\mathrm{arc}(\mathrm{tg} = \lambda)}{4\lambda^5},$$

eller simplere, ved at elliminere arc(tg $=\lambda$) ifölge (130),

$$U = \frac{4\lambda^2}{3 + 14\lambda^2 + 3\lambda^4}. \qquad (131)$$

Det samme udkommer ved i Udtrykket (105) at indsætte Værdien af arc(tg $=\lambda$) ifölge (130), hvilket er en nödvendig Fölge af at Ellipsoiden i dette Tilfælde er en Revolutions-Ellipsoide. Ligning (130) giver ved Oplösning tilnærmelsesviis

$$\lambda = 1{,}3946. \qquad (132)$$

Man har nemlig disse tre consecutive Værdier af λ og tilsvarende af L:

$$\lambda = 1{,}3945,\quad L = 0{,}0000079,$$
$$\lambda = 1{,}3946,\quad L = 0{,}0000003,$$
$$\lambda = 1{,}3947,\quad L = -0{,}0000073.$$

Til Værdien (132) af λ svare

$$\theta = 54^\circ\, 21'\, 27'',\quad e = 0{,}81267, \qquad (133)$$

og ifölge (131)

$$U = 0{,}18711. \qquad (134)$$

Det sees nu overhoved, at for de meget smaa Værdier af u ere tre Ligevægtsfigurer af ellipsoidisk Form mulige, nemlig *to Revolutions-Ellipsoider*, en *kugleformig* og en *skiveformig*, nærmende sig, naar u aftager til 0, til Kuglen og Planet, og *en Ellipsoide med ulige Axer, naaleformig*, nærmende sig en ret Linie, naar u convergerer til 0. Ved $u = 0{,}18711$ falder den naaleformige sammen med den kugleformige, saaledes at over denne Grændse ere begge Revolutions-Ellipsoiderne ene mulige, og nærme sig hinanden stedse mere eftersom u voxer, indtil de for $u = 0{,}22467$ falde sammen, hvorefter de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer ophöre at være mulige.

23. De Integraler, ved Hjælp af hvilke Ligevægts-Ellipsoiden med ulige Axer er bestemt, kunne reduceres til elliptiske Functioner af 1ste og 2den Art. Sættes nemlig i begge Integralerne (113)

$$x = \frac{1}{\lambda'} \operatorname{tg} \varphi,$$

erholdes

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{\lambda'^3} \int_0^{\theta'} \frac{\sin^2\varphi . \left(1 - \frac{1+\lambda'^2}{\lambda'^2} \sin^2\varphi\right)(1 - (1+\lambda^2)\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\cos^2\varphi . \Delta^3}, \\ u &= \frac{2\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)}}{\lambda'^3} \int_0^{\theta'} \frac{\sin^2\varphi . \left(1 - \frac{1+\lambda'^2}{\lambda'^2} \sin^2\varphi\right) d\varphi}{\Delta^3}, \end{aligned}\right\}$$

idet Modulus c er bestemt ved

$$b = \frac{\lambda}{\lambda'} = \cos\mu, \quad c = \sin\mu. \tag{135}$$

Ved at decomponere Integralerne paa sædvanlig Maade findes

$$H = \frac{1}{\lambda'^3} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\lambda'^2(1+2\lambda^2+\lambda^2\lambda'^2)+\lambda'^4-\lambda^4}{(\lambda'^2-\lambda^2)^2} F(\theta') - \frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\lambda'^2}{(\lambda'^2-\lambda^2)^2} E(\theta') \\ &+ \Pi(-1, \theta') - \frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\lambda'^2}{(\lambda'^2-\lambda^2)^2} \Pi(-c^2, \theta') \end{aligned} \right\},$$

$$u = \frac{2\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)}}{(\lambda'^2-\lambda^2)^2\lambda'} \left\{ (2+\lambda^2+\lambda'^2) F(\theta') - (1+\lambda'^2) E(\theta') - (1+\lambda^2) \Pi(-c^2, \theta') \right\};$$

men som bekjendt er

$$\Pi(-1, \theta') = F(\theta') - \frac{1}{b^2} E(\theta') + \frac{1}{b^2} \Delta \operatorname{tg} \theta',$$

$$\Pi(-c^2, \theta') = \frac{1}{b^2} E(\theta') - \frac{c^2}{b^2} \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\Delta},$$

og ifölge (135) $b = \cos\mu$, $c = \sin\mu$, $\lambda = \lambda' \cos\mu$, desuden $\lambda' = \operatorname{tg} \theta'$, fölgelig

$$H \cos^2\mu \operatorname{tg}^3\theta' = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1 - \sin^2\mu \sin^2\theta'}{\sin^4\mu \sin^2\theta' \cos^2\theta'} [2\cos^2\mu\, F(\theta') - (1+\cos^2\mu) E(\theta')] \\ &- E(\theta') + \frac{1 + \sin^2\mu \sin^2\theta'}{\sin^2\mu \sin\theta' \cos\theta'} \sqrt{1 - \sin^2\mu \sin^2\theta'} \end{aligned} \right\} = 0, \tag{136}$$

$$u = \frac{2\sqrt{1 - \sin^2\mu \sin^2\theta'}}{\sin^4\mu \operatorname{tg}\theta' \sin^4\theta'} \left\{ \begin{aligned} &(2 - \sin^2\mu \sin^2\theta') F(\theta') - \left[1 + \frac{1 - \sin^2\mu \sin^2\theta'}{\cos^2\mu}\right] E(\theta') \\ &+ \operatorname{tg}^2\mu \sin\theta' \cos\theta' \sqrt{1 - \sin^2\mu \sin^2\theta'} \end{aligned} \right\}. \tag{137}$$

Ligning (136) mellem de to Vinkler μ og θ' tjener til at bestemme den ene af disse ved den anden, hvilket kun kan skee tilnærmelsesviis og idet man betjener sig af de elliptiske Tavler. Det vil da væsentligen komme an paa at construere en Tavle, fremstillende Værdierne af θ' svarende til de successive Modulus-Vinkler μ angivne f. Ex. blot i hele Grader fra $\mu = 90°$ ned til $\mu = 0$. Derefter findes nemlig let baade de tilsvarende Værdier af θ ifölge $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta' \cos\mu$ (saa at $90° - \theta$ er den complementære Amplitude til θ') fra $\theta = 0$ til $\theta = \theta' = 54°21'27''$, og de tilsvarende Værdier af u, bestemte ved (137), som gaae fra $u = 0$ til $u = 0{,}18711$.

24. Ifölge det foregaaende bestemmes de forskjellige ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af den flydende Masse svarende til den samme Rotationshastighed. Disse Figurer ere, som man har seet, i det höieste tre, nemlig to Revolutions-Ellipsoider og en Ellipsoide med tre ulige Axer. Eftersom Rotationshastigheden antages stedse större, ville disse tre Figurer alle efter en vis Lov forandre dem, men saaledes at ved en bestemt Grændse bliver den sidstnævnte Figur umulig, ved en höiere Grændse blive de to andre paa een Gang umulige, idet de i selve Overgangspunktet falde sammen til een Figur. De Figurer, som svare til den samme Rotation, forudsætte imidlertid forskjellige primitive Impulser, og det vil derfor ogsaa være af Vigtighed at undersöge, hvilke Ligevægtsfigurer der kunne svare til den samme Impuls. Massen forudsættes da at være bragt i Rotationsbevægelse, hvorefter Figuren saavelsom Rotationshastigheden efterhaanden forandres, naar ikke netop Ligevægtens Betingelser vare tilfredsstillede i det förste Öieblik; men da Massens Dele have en vis Sammenhængskraft, som danner en Modstand mod Bevægelsen, er det naturligt, at Massen ender med at gjöre stedse mindre Svingninger paa begge Sider af Ligevægtstilstanden, idet den stedse mere nærmer sig hertil. Den til den oprindelige Impuls svarende endelige Ligevægtstilstand, som Massen kommer til at opnaae, er undersögt af Laplace med Hensyn til Revolutions-Ellipsoider og af Liouville med Hensyn til Ellipsoider

med tre ulige Axer*). Da Massen kun er underkastet Delenes gjensidige Indvirkninger paa hinanden, efterat den er sat i Bevægelse ved de Kræfter, som oprindeligen have indvirket paa den, vil Principet for det invariable Plan være gjældende. Under den hele Række af uregelmæssige Bevægelser omkring Tyngdepunktet vil der være et vist gjennem dette Punkt gaaende Plan, paa hvilket Summen af Arealerne beskrevne i Tidselementet dt af de projicerede Radii Vectores fra Tyngdepunktet til alle Masseelementerne og multiplicerede med disse sidste er et Maximum. Dette Plan er uforanderligt saavelsom Værdien af det nævnte Maximum. Naar altsaa Bevægelsen ender med en uforanderlig Rotation, saa vil Rotationsaxen blive den Linie gjennem Tyngdepunktet, som staaer perpendiculær paa det invariable Plan; og betegnes som forhen den angulære Hastighed ved ω, Inertiens Moment med Hensyn til Rotationsaxen ved N, vil man have $\frac{1}{2}N\omega\,dt$ som Værdien af det uforanderlige Maximum, altsaa som den Störrelse, formedelst hvilken den endelige Ligevægtstilstand kommer til at afhænge af den primitive Impuls. For Ellipsoiden med de tre ulige Halvaxer α, β, γ, af hvilke den förste falder sammen med Rotationsaxen, haves som bekjendt

$$N = \frac{1}{5}M(\beta^2+\gamma^2) = \frac{1}{5}M\alpha^2\frac{\sigma+\tau}{\sigma\tau},$$

men ifölge den förste (97) er $\alpha^2 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}(\sigma\tau)^{\frac{1}{3}}$, altsaa

$$N = \frac{1}{5}M\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\sigma+\tau}{(\sigma\tau)^{\frac{2}{3}}},$$

hvoraf ifölge (104)

$$N^2\omega^2 = \frac{1}{25}2\pi g\varrho M^2\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{(\sigma+\tau)^2}{(\sigma\tau)^{\frac{4}{3}}}u.$$

Altsaa, naar man sætter for Kortheds Skyld

*) Traité de méc. cél., T. II pag. 59; Conn. des temps, 1846, pag. 93.

den förste aftage, den anden voxe. Ligningen $\psi=0$ kan altsaa ikke have flere end den ene Rod, eller med andre Ord: Fluidet kan kun komme i Ligevægt ved en eneste Figur af Revolutions-Ellipsoider, som bestemmes ved det oprindelige Stöd, som har sat Massen i Bevægelse, og denne Figur er altid mulig, hvilket end dette Stöd har været (Laplaces Sætning). — Ellipsoiden med ulige Axer forudsætter derimod en vis Betingelse med Hensyn til det oprindelige Stöd. Udtrykket (139) giver

$$dq=\frac{2}{3}\frac{(\sigma+\tau)u}{(\sigma\tau)^{\frac{7}{3}}}[\tau(\sigma-2\tau)\,d\sigma+\sigma(\tau-2\sigma)\,d\tau]+\frac{(\sigma+\tau)^2}{(\sigma\tau)^{\frac{4}{3}}}\,du.$$

Altsaa, idet σ betragtes som den uafhængige og de forhen fundne Udtryk for $d\tau$ og du indsættes,

$$\frac{dq}{d\sigma}=-\frac{(\sigma+\tau)^2(\sigma-\tau)}{(\sigma\tau)^{\frac{4}{3}}\,\frac{dF}{d\tau}}\left\{\left[\frac{4}{3}\frac{A_0}{\sigma\tau}+2\frac{A_1}{\sigma+\tau}\right]u-A_0B_0-(\sigma+\tau)A_0B_1-\frac{3}{2}\sigma\tau A_1B_1\right\}$$

eller, ved at indsætte Udtrykkene for u, B_0, B_1, givne ved (116) og (128),

$$\frac{dq}{d\sigma}=-\frac{(\sigma+\tau)^2(\sigma-\tau)}{(\sigma\tau)^{\frac{4}{3}}\,\frac{dF}{d\tau}}\int_0^\infty\frac{y(1+y)^2}{R^5}[C_0+C_1y+C_2y^2]\,dy,$$

idet

$$C_0=\frac{1}{3}A_0+\frac{2\sigma\tau}{\sigma+\tau}A_1=\frac{2\sigma\tau(2A_0+3A_1)+(\sigma+\tau-4\sigma\tau)A_0}{3(\sigma+\tau)},$$

$$C_1=\frac{1}{3}(\sigma+\tau)A_0+\frac{1}{2}\sigma\tau A_1=\frac{1}{4}(\sigma+\tau)(C_0+A_0),$$

$$C_2=\frac{11}{6}\sigma\tau A_0+2\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma+\tau}A_1=\sigma\tau\left(C_0+\frac{3}{2}A_0\right).$$

Det er forhen beviist, at A_0 og $2A_0+3A_1$ ere positive; og, da $\sigma+\tau<1$, er $\sigma+\tau-4\sigma\tau>(\sigma+\tau)^2-4\sigma\tau=(\sigma-\tau)^2>0$. Följelig er C_0 positiv, og derved ogsaa C_1 og C_2 positive. Tillige er $\sigma-\tau$ positiv, men $\frac{dF}{d\tau}$ negativ. Föl-

$$q=\frac{N^2\omega^2}{\frac{1}{25}2\pi g\varrho M^2\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}}},\qquad (138)$$

vil man have

$$q=\frac{(\sigma+\tau)^2}{(\sigma\tau)^{\frac{4}{3}}}u\qquad (139)$$

som en Störrelse, der alene afhænger af den oprindelige Impuls saavelsom af de givne Constanter V, ϱ, g. Revolutions-Ellipsoiden giver $\sigma=\tau=\frac{1}{1+\lambda^2}$, hvorved (139) reduceres til

$$q=4(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}u,\qquad (140)$$

og naar u bestemt herved indsættes i Ligningen (106) for Ligevægtsfirerne ved Revolutions-Ellipsoider, erholdes

$$\psi=\frac{3\lambda+\frac{1}{4}q(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}\lambda^3}{3+\lambda^2}-\text{arc}(\text{tg}=\lambda)=0.\qquad (141)$$

Denne Ligning giver stedse en enkelt reel Værdie af λ for en hvilkensomhelst positiv Værdie af q, hvilket bevises saaledes. Er λ uendelig lille positiv, erholdes ved Rækkeudvikling $\psi=\frac{1}{12}q\lambda^3$, som er positiv, hvorimod $\lambda=\infty$ giver $\psi=-\frac{1}{2}\pi$, som er negativ. Heraf sluttes Existentsen af idetmindste een Rod for hver positiv Værdie af q. Man har

$$\frac{d\psi}{d\lambda}=\frac{\lambda^4\left\{\left(\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{3}{2}\right)q-\left[\frac{1}{12}q\lambda^2+4(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}}{(3+\lambda^2)^2(1+\lambda^2)^{\frac{5}{3}}},$$

som er positiv for de meget smaa Værdier af λ, men maa allerede have passeret 0 og være bleven negativ förend λ ved continuerligen at voxe fra 0 kan komme til at passere en positiv Rod i Ligningen $\psi=0$. Tillige sees, at saasnart $\frac{d\psi}{d\lambda}$ er bleven negativ, maa den bestandigen forblive negativ, efterdi den stedse voxende λ lader bestandigen af Störrelserne

$$\left(\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{3}{2}q\right),\quad \frac{1}{12}q\lambda^2+4(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}},$$

gelig er $\frac{dq}{d\sigma}$ positiv, saa at, medens σ aftager fra **1** til dens laveste Værdie $\sigma=\tau=\cos^2 54^\circ 21^\circ 27''$, vil q aftage fra $q=\infty$ ned til dens laveste Værdie $q=q'$; thi til $\sigma=1$, $\tau=0$, svarer $q=\infty$, hvilket sees af Udtrykket (139), som, naar Værdien af u ifölge (116) indsættes, giver

$$q=\frac{(\sigma+\tau)^2}{(\sigma\tau)^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty\frac{ydy}{(1+\sigma y)(1+\tau y)R},$$

hvorimod Minimummet er bestemt ifölge (140) ved

$$q'=4(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}U,$$

λ og U bestemte ved (132) og (134), altsaa

$$q'=1{,}5377.$$

Det oprindelige Stöd vil altsaa, forsaavidt q ikke falder under dette Minimum, stedse kunne lede til en enkelt ellipsoidisk Ligevægtsfigur med tre ulige Axer, idet de uregelmæssige Bevægelser tilsidst ende med en constant Rotation om Ellipsoidens mindste Axe, hvorimod $q<q'$ lader alene Revolutions-Ellipsoiden være mulig (Liouvilles Theorem). Da q, u, τ ere den förste en voxende, de to andre aftagende Functioner af σ, saa sluttes, at naar q antages stedse större, maa u og derved ogsaa ω antages stedse mindre, ligesaa θ, derimod θ' stedse större. Til samme Tid vil ifölge den förste (97) α være stedse mindre, thi man har

$$\frac{d.\sigma\tau}{d\sigma}=\tau-\sigma\frac{A_0+A_1\tau}{A_0+A_1\sigma}=\frac{A_0(\sigma-\tau)}{\frac{dF}{d\tau}},$$

som er negativ. Ligeledes ville β og $\frac{\beta}{\alpha}$ formindskes, derimod γ og $\frac{\gamma}{\alpha}$ voxe. De Slutninger, som heraf kunne udledes, ere alle aabenbare. Det er de tydske Mathematikere Jacobi og C. O. Meyer, hvem Æren tilkommer for at have banet Veien til Opdagelsen af disse mærkelige Resultater, som tjene til at fuldstændiggjöre de forhen bekjendte Sætninger om Revolutions-Ellipsoiderne som Ligevægtsfigurer. Men disse Resultater vinde endnu i Betydning ved hvad vi ovenfor i denne Afhandling have oplyst, at af alle Love for Tiltrækninger, som bestandigen aftage med de voxende Afstande, er den Lov, som Naturen fölger, den eneste, som overhoved kan gjöre ellipsoidiske Ligevægtsfigurer mulige.